

1 Dénombrements pratiques

Exercice 1 ★ Groupe d'étudiants –

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1197]

Exercice 2 ★ Podium! –

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1201]

Exercice 3 ★ Les boulangeries –

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.
2. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2362]

Exercice 4 ★★ Le cadenas –

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Combien y-a-t-il de codes possibles ? Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ? Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ? Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
3. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
4. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
5. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
6. Dans les questions suivantes, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts. Combien y-a-t-il de codes possibles ? Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ? Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?
7. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
8. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
9. Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2327]

Exercice 5 ★★ Anagrammes –

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1204]

Exercice 6 ★★★★★ Bridge –

Dans cet exercice, on attend des réponses qui ne sont pas des valeurs numériques, mais des expressions en termes de factorielles, sous la forme la plus simple possible.

1. Combien y-a-t-il de façons de répartir les 52 cartes d'un jeu entre 4 joueurs N, S, E, O, chacun possédant 13 cartes.
2. Parmi ces façons, combien y-en-a-t-il qui sont telles que chaque joueur n'a qu'une seule couleur (par exemple, N a les 13 piques, S a les 13 coeurs,...) ?
3. Combien y-a-t-il de façons que deux joueurs quelconques aient chacun une seule couleur ?
4. Combien y-a-t-il de façons que deux partenaires, c'est-à-dire (N,S) ou (E,O), aient chacun une seule couleur, les deux autres partenaires ayant des cartes quelconques.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2587]

Exercice 7 ★★★★★ Le poker –

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :

1. quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (Attention ! la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).
2. carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).
3. full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).
4. quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.
5. brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2361]

Exercice 8 ★★★★★ Tirages dans un jeu de cartes –

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3. contenant 2 carreaux et 3 piques.
4. contenant au moins un roi.
5. contenant au plus un roi.
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1202]

Exercice 9 ★★★★★ Le concours –

Soit n un entier non nul. On désigne par u_n le nombre de listes de n termes, chaque terme étant 0 ou 1, et n'ayant pas deux termes 1 consécutifs.

1. Que vaut u_1 ? u_2 ?
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
3. Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20} .
4. Application : un concours comporte vingt questions, numérotées de 1 à 20. On a constaté que, parmi les 17712 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2366]

Exercice 10 ★★ $n + 1$ entiers parmi $2n -$

On considère un ensemble X de $n + 1$ entiers (distincts) choisis dans $\{1, \dots, 2n\}$. Démontrer que parmi les éléments de X , on peut toujours trouver 2 entiers dont la somme fait $2n + 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3129]

Exercice 11 ★★★★★ Grilles de Fleissner –

Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour.

1. Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?

2. Pour quelles valeurs de n peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté n ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1206]

2 Coefficients binomiaux

Exercice 12 ★ Une formule –

Soit $1 \leq p \leq n$. On considère n boules et deux boîtes A et B . Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p - 1$ boules dans la boîte B . En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}.$$

Retrouver cette formule par le calcul.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2364]

Exercice 13 ★★ Dans un livre –

Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?

2. Pour $k = 3, \dots, 14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.

3. En déduire que

$$\binom{14}{3} = \binom{13}{2} + \binom{12}{2} + \dots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$

4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2365]

Exercice 14 ★★★★★ Bizarre –

Démontrer par un dénombrement que, pour $n \geq 1$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1212]

Exercice 15 ★★★★★ Une somme –

Soit n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer par dénombrement que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1213]

3 Dénombrements théoriques

Exercice 16 ★ Couple d'entiers –

Soit $n \geq 2$ un entier. Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $\{1, \dots, n\}^2$ tels que

1. $x + y = n$;
2. $x < y$;
3. $|x - y| \leq 1$;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3130]

Exercice 17 ★★ Partitions d'un entier –

On appelle partition d'un entier naturel n toute suite finie $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ telle que $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$. On note Γ_n l'ensemble des partitions de l'entier n .

1. Déterminer $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

2. Pour $j, n \in \mathbb{N}$, on note $Y_{n,j}$ l'ensemble des partitions de n dont le premier terme est inférieur ou égal à j , et on note $y_{n,j}$ le cardinal de $Y_{n,j}$. On convient que $y_{0,0} = 1$.

Calculer $y_{n,1}$. On se propose de démontrer que, si $2 \leq j \leq n$, alors $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j, \min(j, n-j)}$. Démontrer cette relation pour $j = n$. Pour $2 \leq j < n$, vérifier que $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j, \min(j, n-j)}$ puis conclure.

3. Calculer $y_{n,1}$.

4. On se propose de démontrer que, si $2 \leq j \leq n$, alors $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j, \min(j, n-j)}$. Démontrer cette relation pour $j = n$.

5. Pour $2 \leq j < n$, vérifier que $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j, \min(j, n-j)}$ puis conclure.

6. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et qui renvoie le cardinal de Γ_n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2665]

Exercice 18 ★ Contenant un et un seul élément d'une partie donnée –

Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble à n éléments. Soit p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$ et soit A une partie de E à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent exactement un et un seul élément de A ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3085]

Exercice 19 ★★ Parties disjointes –

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit X une partie à p éléments de E . Combien y-a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

2. Combien y-a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1207]

Exercice 20 ★★★★★ Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments –

Soit n et k deux entiers strictement positifs.

1. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en k parties. Dans la suite, on notera $S(n, k)$ le nombre de ces partitions. On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.
2. Que vaut $S(n, k)$ pour $k > n$?
3. Que vaut $S(n, 1)$?
4. Démontrer que $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.
5. Rédiger une fonction récursive Python permettant de calculer $S(n, k)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2537]

Exercice 21 ★★★★★ Nombres de Bell –

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble E de cardinal n . On pose $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1 , B_2 et B_3 .
2. Établir la formule de récurrence

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2743]

Exercice 22 ★★★★★ Nombre de fonctions (strictement) croissantes –

Soit $n, p \geq 1$ deux entiers.

1. Combien y-a-t-il de fonctions strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$?
2. Soit $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ une fonction croissante. On pose $\phi(f)$ la fonction définie sur $\{1, \dots, p\}$, à valeurs dans $\{1, \dots, n+p-1\}$, par $\phi(f)(k) = f(k) + k - 1$. Démontrer que $\phi(f)$ est strictement croissante. Soit $g : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n+p-1\}$ une fonction strictement croissante. On pose $\psi(g)$ la fonction définie sur $\{1, \dots, p\}$, à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, par $\psi(g)(k) = g(k) - k + 1$. Démontrer que $\psi(g)$ est croissante. Combien y-a-t-il de fonctions croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$?
3. Soit $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ une fonction croissante. On pose $\phi(f)$ la fonction définie sur $\{1, \dots, p\}$, à valeurs dans $\{1, \dots, n+p-1\}$, par $\phi(f)(k) = f(k) + k - 1$. Démontrer que $\phi(f)$ est strictement croissante.
4. Soit $g : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n+p-1\}$ une fonction strictement croissante. On pose $\psi(g)$ la fonction définie sur $\{1, \dots, p\}$, à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, par $\psi(g)(k) = g(k) - k + 1$. Démontrer que $\psi(g)$ est croissante.
5. Combien y-a-t-il de fonctions croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3131]

Exercice 23 ★★★★★ Dérangement et problème des rencontres –

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E , avec la convention $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1 .
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2 .
3. On suppose n quelconque, et on écrit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soit f une permutation de E . On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k.$$

4. En déduire D_3 , D_4 , D_5 .

5. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes, on numérote les femmes de 1 à 5, et les hommes de 1 à 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire.

À chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y-a-t-il d'associations possibles ? Donner la probabilité pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué. Déterminer la probabilité pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes.

6. À chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y-a-t-il d'associations possibles ?

7. Donner la probabilité pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué.
8. Déterminer la probabilité pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué.
9. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1214]

Exercice 24 ★★★★★ Nombre de surjections –

On se propose de calculer le nombre $S(n, p)$ de surjections de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$, où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Des cas particuliers :
Calculer $S(n, p)$ pour $p > n$. Calculer $S(n, n)$. Calculer $S(n, 1)$. Calculer $S(n, 2)$.
2. Calculer $S(n, p)$ pour $p > n$.
3. Calculer $S(n, n)$.
4. Calculer $S(n, 1)$.
5. Calculer $S(n, 2)$.
6. Calculer $S(n+1, n)$.
7. Démontrer que, pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a la relation

$$S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1)).$$

8. En déduire un algorithme pour calculer $S(n, p)$.
9. Démontrer que $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1216]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Réaliser un tableau à double entrée.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. On dénombre une liste.
 2. On dénombre un arrangement.
 3. Procéder par différence.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

Indication pour l'exercice 5 ▲

Un anagramme correspond à une permutation des lettres, mais certaines permutations donnent le même résultat.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Compter le nombre de choix possibles pour le premier joueur, puis pour le deuxième...
 2. Choisir une couleur parmi 4 pour N, puis une couleur parmi...
 3. Choisir d'abord les deux joueurs qui ont une seule couleur, puis choisir pour chaque joueur la couleur.
 4. Raisonner de la même façon.
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. On choisit la couleur puis la hauteur de la plus haute carte.
 2. On choisit la hauteur, puis la dernière carte.
 3. Choisir les deux hauteurs, puis 3 cartes parmi 4, et 2 cartes parmi 4.
 4. Raisonner par différence en utilisant le résultat pour les quintes flush.
 5. Raisonner par différence.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Il faut choisir une partie à 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments.
 2. Compter séparément le nombre de tirages comprenant 5 carreaux et 5 piques.
 3. Choisir les carreaux, puis les piques.
 4. Compter les tirages sans roi, et retirer du nombre total.
 5. Compter les tirages sans roi, puis ceux avec exactement un roi.
 6. Séparer les tirages contenant le roi de pique, et ceux ne contenant pas le roi de pique.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

- 1.
 2. Trier les listes : finissant par 0 ou finissant par 1.
 - 3.
 4. Associer à chaque questionnaire une liste de 0 et de 1.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

Considérer les n paires d'entiers "complémentaires" $\{1, 2n\}, \{2, 2n-1\}, \dots$

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. On a 36 choix pour le premier trou. Et combien pour le second ?
 2. Il faut effectuer $n^2/4$ trous...
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Indication pour l'exercice 13 ▲

Pour la troisième question, partir d'un livre à $n + 1$ chapitres, et sélectionner $p + 1$ chapitres dans ce livre.

Indication pour l'exercice 14 ▲

On pourra compter le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments en coupant d'abord le gros ensemble en deux parties égales.

Indication pour l'exercice 15 ▲

On pourra discuter suivant la valeur du plus grand entier d'une partie à $p + 1$ éléments de $\{0, \dots, n\}$.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Si x est choisi, y est fixé.
 2. A x fixé, combien de choix possibles pour y ?
 3. A x fixé, combien de choix possibles pour y ? Attention, il y a deux cas particuliers.
-

Indication pour l'exercice 17 ▲

- 1.
 2. Classer les partitions en deux types. Classer les partitions en deux types. Pour conclure, on pourra utiliser que si $q > p$, alors $y_{p,q} = y_{p,p}$.
 - 3.
 4. Classer les partitions en deux types.
 5. Classer les partitions en deux types. Pour conclure, on pourra utiliser que si $q > p$, alors $y_{p,q} = y_{p,p}$.
 - 6.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

Choisir d'abord l'élément de A , puis une partie du complémentaire.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Y est une partie de ...
 2. On choisit d'abord X , puis Y d'après la première question.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Utiliser le fait que le nombre de parties de $\{1, \dots, n\}$ est fini.
 - 2.
 - 3.
 4. Distinguer les partitions de $\{1, \dots, n\}$ selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Énumérer toutes les partitions de $\{a, b\}$ et de $\{a, b, c\}$.
2. Choisir un élément a de E . Une partition de E contient un élément A qui contient a . La partition est alors déterminée par l'ensemble A et par une partition de $\{1, \dots, n\} \setminus A$.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Une partie à p éléments de $\{1, \dots, n\}$ caractérise une fonction strictement croissante.
 2. Il suffit de calculer $\phi(f)(k+1) - \phi(f)(k)$.
Montrer que les deux applications ϕ et ψ définies à la question précédente sont des bijections réciproques.
 3. Il suffit de calculer $\phi(f)(k+1) - \phi(f)(k)$.
 - 4.
 5. Montrer que les deux applications ϕ et ψ définies à la question précédente sont des bijections réciproques.
-

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Une permutation d'un tel E peut-elle n'avoir aucun point fixe ?
 2. Ecrire toutes les permutations de E .
 3. Compter le nombre de choix d'éléments invariants, puis le nombre de permutations possibles sur les éléments non invariants. Séparer ensuite l'ensemble des permutations de E en fonction de leur nombre de points invariants.
 4. Appliquer successivement la relation précédente pour $n = 3, n = 4, n = 5$.
 5. Exprimer le nombre en terme de permutations. Exprimer le nombre en terme de dérangements. Choisir le couple légitime, puis décaler les autres. Compter aussi le cas où il y a exactement deux couples légitimes.
 6. Exprimer le nombre en terme de permutations.
 7. Exprimer le nombre en terme de dérangements.
 8. Choisir le couple légitime, puis décaler les autres.
 9. Compter aussi le cas où il y a exactement deux couples légitimes.
-

Indication pour l'exercice 24 ▲

- 1.
 2. Un unique élément de l'ensemble d'arrivée doit avoir deux antécédents.
 3. On pourra considérer la restriction à $\{1, \dots, n-1\}$ d'une surjection de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$.
 - 4.
 5. Procéder par récurrence.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition :

On complète alors le tableau de proche en proche de sorte d'obtenir les bons totaux sur chaque ligne et chaque colonne. Par exemple, sur la première ligne de la colonne "Chimie", on peut facilement inscrire le chiffre 9. On obtient donc

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à $20 \times 19 \times 18 = 6840$.

2. Le premier concurrent est Emile. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles ; Le nombre de podiums ainsi constitués est de 19×18 .

3. Il y a trois choix possibles pour la place d'Emile. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de $3 \times 19 \times 18$. On peut aussi compter le nombre total de podiums (qui vaut $20 \times 19 \times 18$) et lui soustraire le nombre de podiums sans Émile (qui vaut $19 \times 18 \times 17$). Le nombre de podiums avec Émile est alors

$$20 \times 19 \times 18 - 19 \times 18 \times 17 = (20 - 17) \times 19 \times 18 = 3 \times 19 \times 18.$$

On retrouve (heureusement !) le même résultat.

4. L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $\binom{20}{3} = 1140$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour chaque boulangerie, il y a 7 choix possibles. Il y a donc 7^4 façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.

2. On peut procéder comme suit pour dénombrer le nombre de possibilités. La première boulangerie peut fermer n'importe quel jour de la semaine, ce qui lui laisse 7 choix. La seconde boulangerie peut fermer n'importe quel autre jour : 6 choix. La troisième ne peut pas fermer l'un des jours déjà choisi, ce qui lui laisse 5 choix, et pour la dernière, il ne reste que 4 choix. Le nombre de possibilités est donc $7 \times 6 \times 5 \times 4$.

3. On va raisonner par différence, et compter plutôt le nombre de possibilités pour que toutes les boulangeries ferment le même jour : il y a 7 choix (on choisit juste le jour de fermeture commun). Le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour est donc $7^4 - 7$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes. On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.

2. Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles.

3. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes.

4. On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

5. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.

6. On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles (rappelons que tous les chiffres sont distincts). Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$.

7. On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles.

8. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes.

9. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles (rappelons que tous les chiffres sont distincts). Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot ! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombre de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

MATHS : $5!$ RIRE : $4!/2!$ ANANAS : $6!/(2!3!)$

Pour compter les anagrammes d'ANANAS, on peut aussi :

choisir la position des 3 lettres A : il y a $\binom{6}{3}$ choix possibles ; choisir la position des 2 lettres N : il y a $\binom{3}{2}$ choix possibles (il reste 3 places une fois qu'on a placé les A) ; le S est alors placé.

Le nombre d'anagrammes d'ANANAS est donc

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 3!}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Il y a $\binom{52}{13}$ choix possibles pour le premier joueur, puis $\binom{52-13}{13} = \binom{39}{13}$ choix possibles pour le deuxième joueur, et encore $\binom{39-13}{13} = \binom{26}{13}$ pour le troisième. Le dernier joueur prend les 13 cartes restantes. Au total on trouve

$$\binom{52}{13} \times \binom{39}{13} \times \binom{26}{13} = \frac{52!}{39!13!} \times \frac{39!}{26!13!} \times \frac{26!}{13! \times 13!} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

2. On choisit une couleur parmi 4 pour le premier joueur, puis une couleur parmi 3 pour le deuxième et enfin une couleur parmi 2 pour le troisième. Cela fait $4!$ possibilités. On peut aussi argumenter à l'aide du nombre de permutation de 4 couleurs.

3. On commence par choisir les deux joueurs qui ont la même couleur. Il y a $\binom{4}{2}$ tels choix. On choisit ensuite une couleur parmi 4 pour le premier joueur, et une couleur parmi 3 pour le deuxième joueur. Il reste pour le 3ème joueur à choisir 13 cartes parmi les 26 restantes tandis que le quatrième prend le reste. On trouve donc :

$$\frac{4 \times 3}{2} \times 4 \times 3 \times \binom{26}{13} = \frac{72 \times (26)!}{(13!)^2}.$$

Mais ce faisant, on a compté trop les tirages où les 4 joueurs ont une seule couleur : en effet, un tel tirage est compté $\binom{4}{2}$ fois, puisqu'on a choisi deux joueurs qui avaient la même couleur et que cela n'a pas lieu d'être dans ce cas là puisque tous les joueurs ont la même couleur. Il faut donc retirer $\left(\binom{4}{2} - 1\right) 4!$ et le résultat final est :

$$\frac{4 \times 3}{2} \times 4 \times 3 \times \binom{26}{13} - \left(\binom{4}{2} - 1\right) 4! = \frac{72 \times (26)!}{(13!)^2} - 5 \times 4!.$$

4. Le dénombrement à réaliser est très similaire, mais il y a moins de choix pour choisir les deux joueurs qui ont la même couleur puisqu'on ne choisit plus deux joueurs quelconques, mais deux partenaires. Il n'y a donc que 2 choix au lieu de $\binom{4}{2}$. Finalement, on trouve $\frac{24 \times (26)!}{(13!)^2} - 4!$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Il y a 4 choix pour la couleur. La couleur choisie, il suffit de choisir la plus haute carte de la main : il s'agit de n'importe quelle carte entre le 5 et l'as. Il y a donc 10 choix possibles pour la hauteur de la plus haute carte, et donc $4 \times 10 = 40$ mains conduisant à une quinte flush.

2. Il y a 13 choix possibles pour la hauteur de la carte constituant le carré (carré d'as, carré de rois,...). Cette hauteur fixée, il faut encore choisir une carte parmi les 48 autres pour compléter la main. Il y a donc $13 \times 48 = 624$ mains contenant un carré.

3. On choisit d'abord la hauteur des 3 cartes de même valeur. Il y a 13 choix. On choisit alors ces 3 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles. On choisit ensuite la hauteur des deux autres cartes. Il reste 12 choix. Puis on choisit ces 2 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix. Finalement, le nombre de mains constituant un full est

$$13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744.$$

4. On va dénombrer d'abord le nombre de mains constituée de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur. On retirera ensuite le nombre de quintes flush pour obtenir le nombre de mains constituées de 5 cartes qui ne sont pas toutes de la même couleur. Si on compte le nombre de mains constituées de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur, alors on doit choisir la hauteur de la carte la plus haute. Comme précédemment, il y a 10 choix possibles. Ensuite, pour chacune des cinq hauteurs consécutives, on choisit l'une des 4 couleurs, ce qui fait 4^5 choix. Finalement, le nombre de mains correspondant est $10 \times 4^5 = 10240$ ce qui fait que le nombre de quintes est exactement $10240 - 40 = 10200$.

5. On compte le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau et qui ne contient pas un carré : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3} = 4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau. Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi 48 (on doit exclure la dernière carte de même hauteur, sinon on aurait un carré), soit $\binom{48}{2} = 48 \times 47 / 2 = 1128$ choix. Il y a donc $13 \times 4 \times 1128 = 58656$ mains contenant 3 cartes de même niveau, mais pas de carrés. Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les fulls. Il y a donc $58656 - 3744 = 54912$ brelans. Attention au raisonnement faux suivant : on pourrait compter le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3} = 4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau. Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi $52 - 3 = 49$, soit $\binom{49}{2} = 49 \times 48 / 2 = 1176$ choix. Il y a donc $13 \times 4 \times 1176 = 61152$ mains contenant 3 cartes de même niveau. Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les carrés et les fulls. Il y a donc $61152 - 624 - 3744 = 56784$ brelans. Ce raisonnement est faux car quand on a compté le nombre de mains contenant 3 cartes de même niveau, on a compté 4 fois chaque carré. En effet, un carré d'as peut apparaître en choisissant d'abord as de coeur, de carreau, de trèfle, puis en complétant avec as de pique, ou en choisissant as de coeur, de carreau, de pique, puis en complétant avec as de trèfle, etc... Si on veut réaliser un dénombrement correct avec cette méthode, il faut retirer quatre fois le nombre de carrés, et on a bien $61152 - 4 \times 624 - 3744 = 54912$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : $\binom{32}{5} = 201376$ tirages différents.

2. Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a $\binom{8}{5}$ tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a $2 \times \binom{8}{5} = 112$ tels tirages différents.

3. Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$.

4. On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{5}$ tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096$.

5. On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant exactement un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, $\binom{28}{4}$ façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a $\binom{28}{5} + 4 \binom{28}{4} = 180180$ tels tirages.

6. On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique. si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique). si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32 - (4 + 7) = 21$ choix (attention à ne pas compter à nouveau deux fois le roi de pique!).

Finalement, le nombre de tirages possibles est :

$$\binom{3}{2} \times \binom{7}{3} + 3 \times \binom{7}{2} \times 21 = 1428.$$

7. si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).

8. si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32 - (4 + 7) = 21$ choix (attention à ne pas compter à nouveau deux fois le roi de pique !).

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Il y a deux listes possibles à 1 terme, et aucune ne comporte deux 1 consécutifs. Donc $u_1 = 2$. Il y a 4 listes à 2 termes, dont une seule comporte deux 1 consécutifs. Donc $u_2 = 3$.

2. Considérons une liste à n termes n'ayant pas deux 1 consécutifs.

ou bien elle se termine par un 1. Le terme précédent est donc forcément un 0, et pour les $n - 2$ premiers termes, la seule contrainte est qu'il n'y ait pas deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-2} telles listes. ou bien elle se termine par un 0. Il n'y a pas de contraintes sur les $n - 1$ premiers termes, si ce n'est qu'il ne faut pas qu'il y ait deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-1} telles listes.

On a donc réalisé une partition des listes à n termes ne comportant pas deux 1 consécutifs, et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

3. ou bien elle se termine par un 1. Le terme précédent est donc forcément un 0, et pour les $n - 2$ premiers termes, la seule contrainte est qu'il n'y ait pas deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-2} telles listes.

4. ou bien elle se termine par un 0. Il n'y a pas de contraintes sur les $n - 1$ premiers termes, si ce n'est qu'il ne faut pas qu'il y ait deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-1} telles listes.

5. Variables : U entier V entier W entier N entier Traitement 2->U 3->V Pour N allant de 3 à 20 faire U+V->W V->U W->V Fin Pour Afficher V

6. On peut associer à chaque questionnaire une liste de 0 et de 1, le i -ème terme vaut 1 si la réponse est juste, et 0 si la réponse est fausse. L'énoncé nous dit que les 17712 listes obtenues ne comportent deux termes 1 consécutifs. Or, il y a $u_{20} = 17711$ telles listes différentes. Deux des listes doivent donc être identiques, et il y a bien deux candidats qui ont répondu de la même manière aux questions.

Correction de l'exercice 10 ▲

Considérons les paires d'entiers dont la somme fait $2n + 1$: ce sont $\{1, 2n\}, \{2, 2n - 1\}, \{3, 2n - 2\}, \dots, \{n, n + 1\}$. On a donc défini ici n paires d'entiers, et chaque entier entre 1 et $2n$ est contenu dans une seule paire. Tous les entiers de X ne peuvent pas être dans des paires différentes, puisque X contient $n + 1$ éléments. Donc il existe deux éléments de X dans la même paire, et leur somme fait $2n + 1$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. On a $36 = 4 \times 9$ choix pour placer le premier trou. On ne peut ensuite plus choisir ni ce carré, ni les 3 carrés obtenus à partir de celui-ci par rotation. Il reste donc $32 = 4 \times 8$ choix pour placer le second trou. On a ensuite 4×7 choix pour placer le troisième trou, et ainsi de suite... jusqu'à 4 choix pour placer le 9ème trou. Mais attention ! Ce faisant, on compte certaines grilles deux fois. En effet, on obtient la même grille si on échange le premier trou et le deuxième trou.... Il faut diviser donc le total obtenu par le nombre de permutations possibles entre les 9 trous, soit $9!$. Finalement, le nombre de grilles possibles est

$$\frac{4 \times 9 \times 4 \times 8 \times 4 \times 7 \times \dots \times 4 \times 1}{9!} = 4^9.$$

2. Si on veut construire une grille de Fleissner, il faut pouvoir réaliser $n^2/4$ trous (pour qu'avec les 4 positions, on puisse obtenir n^2 trous). Ainsi, n doit être pair (et dans ce cas, n^2 est bien un multiple de 4). Ensuite, on procède comme dans le cas précédent : on a $n^2 = 4 \times \frac{n^2}{4}$ choix pour le premier carré, $n^2 - 4 = 4 \times \left(\frac{n^2}{4} - 1\right)$ choix pour le deuxième carré,... En n'oubliant pas de diviser par la factorielle de $\frac{n^2}{4}$, on obtient que le nombre de grilles est $4^{n^2/4}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

Voici deux façons de compter le nombre d'échantillons.

On choisit d'abord une boule à mettre dans la boîte A : il y a n choix possibles. Puis on choisit $p - 1$ boules parmi les $n - 1$ boules restantes pour mettre dans la boîte B . Il y a donc $n \times \binom{n-1}{p-1}$ échantillons. On choisit d'abord les p boules parmi n qui seront dans les deux boîtes : il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles. Puis on choisit parmi ces p boules celle à mettre dans la boîte A : il y a p choix possibles, et donc le nombre d'échantillons recherché est $p \times \binom{n}{p}$.

Puisqu'on compte de deux façons différentes le même nombre d'échantillons, on obtient bien le résultat escompté. Par le calcul, on a

$$n \binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = p \binom{n}{p}.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. C'est du cours ! Il y en a exactement $\binom{14}{3}$.
2. Une fois le numéro k du plus grand chapitre choisi, il reste 2 chapitres à choisir parmi $k - 1$: il y a donc exactement $\binom{k-1}{2}$ choix de chapitres dont le dernier porte le numéro k .
3. On réalise une partition de l'ensemble des parties à 3 éléments en fixant le plus grand élément valant de 3 à 14. On a donc

$$\binom{14}{3} = \sum_{k=3}^{14} \binom{k-1}{2}$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

4. On part cette fois d'un livre comprenant $n + 1$ chapitres et on en sélectionne $p + 1$. Il y a $\binom{n+1}{p+1}$ choix possibles. On étudie ensuite le nombre de choix possibles où le plus grand des chapitres porte le numéro k , pour k allant de $p + 1$ à $n + 1$: il y en a $\binom{k-1}{p}$ (reste p chapitres à choisir parmi ceux numérotés de 1 à $k - 1$). On a donc

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k-1}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

$\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments. Pour compter ce nombre de parties, on peut aussi diviser l'ensemble en deux sous-ensembles contenant chacun n éléments. Pour obtenir n éléments, on peut en prendre k dans le premier, ie $\binom{n}{k}$ choix, et $n - k$ dans le deuxième, soit $\binom{n}{n-k}$ choix. On a donc :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

puisque $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. On peut aussi démontrer ce résultat sans dénombrement en remarquant que $\binom{2n}{n}$ est le coefficient devant X^n du polynôme $(X + 1)^{2n}$. On retrouve l'autre valeur en écrivant $(X + 1)^{2n} = (X + 1)^n (X + 1)^n$ et en identifiant.

Correction de l'exercice 15 ▲

Le coefficient binomial $\binom{n+1}{p+1}$ désigne le nombre de parties à $p + 1$ éléments dans l'ensemble $\{0, \dots, n\}$ qui a $n + 1$ éléments. Soit E une telle partie, et k le plus grand entier qu'elle contient. Puisque la partie contient $p + 1$ éléments, on a $k \geq p$. De plus, cet élément choisi, il reste p éléments à choisir dans l'ensemble $\{0, \dots, k - 1\}$ qui contient k éléments, c'est-à-dire qu'il reste $\binom{k}{p}$ choix. Une autre méthode pour démontrer

cette propriété est de procéder par récurrence sur n . La formule est clairement vraie pour $n = 0$ (ce qui implique $p = 0$). Supposons la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire que pour tout $p \leq n$, la formule donnée est vérifiée. Prouvons-la au rang $n + 1$. Pour cela, prenons $p \leq n + 1$. Si $p \leq n$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \text{ (formule du triangle de Pascal).}\end{aligned}$$

Si $p = n + 1$, la formule est aussi vérifiée. La propriété est donc aussi vraie au rang $n + 1$. On peut aussi démontrer la formule par "télescopage" en remarquant que, pour $k > p$, on a

$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$

et donc que

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} &= \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. On peut choisir x quelconque dans $\{1, \dots, n-1\}$. Une fois ce x fixé, y est déterminé par la formule $y = n - x$ (et y est bien dans $\{1, \dots, n\}$). Il y a donc $n - 1$ tels couples.

2. On choisit d'abord x dans $\{1, \dots, n-1\}$. Une fois cette valeur de x fixée, y peut prendre n'importe quelle valeur dans $\{x+1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que y peut prendre $n - x$ valeurs. Le nombre recherché est donc

$$\sum_{x=1}^{n-1} (n-x) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

(on a procédé à un changement d'indice $k = n - x$).

3. Si $x = 1$, il y a deux choix pour y , 1 et 2. Si $x = n$, il y a deux choix pour y , $n - 1$ et n . Sinon, il y a trois choix pour y , les entiers $x - 1$, x et $x + 1$. On a donc en tout $2 + 2 + 3(n-2) = 3n - 2$ tels couples.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On a $\Gamma_1 = \{(1)\}$, $\Gamma_2 = \{(2), (1, 1)\}$, $\Gamma_3 = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$, $\Gamma_4 = \{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.

2. Il n'y a qu'une seule partition qui commence par un 1 : celle qui comporte n fois le chiffre 1. Donc $y_{n,1} = 1$. Lorsque $j = n$, on cherche à déterminer toutes les partitions. On les sépare en deux parties disjointes :

Les partitions qui commencent par un n : il n'y en a qu'une, la partition (n) , et $y_{n-n,0} = y_{0,0} = 1$. Les partitions qui commencent par un nombre inférieur ou égal à $n - 1$: il y en a $y_{n,n-1}$.

D'où $y_{n,n} = y_{n,n-1} + y_{0,0}$ qui est le résultat demandé. De la même façon, on sépare les partitions de n commençant par un nombre inférieur ou égal à j en deux parties disjointes :

les partitions commençant par j ; il reste alors $n - j$ à partager en une partition qui commence par un nombre inférieur ou égal à j ; il y a donc exactement $y_{n-j,j}$ telles partitions. les partitions commençant par un nombre inférieur ou égal à $j - 1$. Il y a exactement $y_{n,j-1}$ telles partitions.

On a donc prouvé, pour $2 \leq j \leq n - 1$, la relation $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$. Si $j \leq n - j$, c'est exactement la relation demandée. Si $j > n - j$, alors on a $y_{n-j,j} = y_{n-j,n-j}$ (plus généralement, si $q > p$, alors $y_{p,q} = y_{p,p}$ car

toute partition de p qui commence par un nombre inférieur ou égal à q commence en réalité par un nombre inférieur ou égal à p). Dans tous les cas, on a prouvé le résultat demandé.

3. Il n'y a qu'une seule partition qui commence par un 1 : celle qui comporte n fois le chiffre 1. Donc $y_{n,1} = 1$.

4. Lorsque $j = n$, on cherche à déterminer toutes les partitions. On les sépare en deux parties disjointes :

Les partitions qui commencent par un n : il n'y en a qu'une, la partition (n) , et $y_{n-n,0} = y_{0,0} = 1$. Les partitions qui commencent par un nombre inférieur ou égal à $n-1$: il y en a $y_{n,n-1}$.

D'où $y_{n,n} = y_{n,n-1} + y_{0,0}$ qui est le résultat demandé.

5. Les partitions qui commencent par un n : il n'y en a qu'une, la partition (n) , et $y_{n-n,0} = y_{0,0} = 1$.

6. Les partitions qui commencent par un nombre inférieur ou égal à $n-1$: il y en a $y_{n,n-1}$.

7. De la même façon, on sépare les partitions de n commençant par un nombre inférieur ou égal à j en deux parties disjointes :

les partitions commençant par j ; il reste alors $n-j$ à partager en une partition qui commence par un nombre inférieur ou égal à j ; il y a donc exactement $y_{n-j,j}$ telles partitions. les partitions commençant par un nombre inférieur ou égal à $j-1$. Il y a exactement $y_{n,j-1}$ telles partitions.

On a donc prouvé, pour $2 \leq j \leq n-1$, la relation $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$. Si $j \leq n-j$, c'est exactement la relation demandée. Si $j > n-j$, alors on a $y_{n-j,j} = y_{n-j,n-j}$ (plus généralement, si $q > p$, alors $y_{p,q} = y_{p,p}$ car toute partition de p qui commence par un nombre inférieur ou égal à q commence en réalité par un nombre inférieur ou égal à p). Dans tous les cas, on a prouvé le résultat demandé.

8. les partitions commençant par j ; il reste alors $n-j$ à partager en une partition qui commence par un nombre inférieur ou égal à j ; il y a donc exactement $y_{n-j,j}$ telles partitions.

9. les partitions commençant par un nombre inférieur ou égal à $j-1$. Il y a exactement $y_{n,j-1}$ telles partitions.

10. En utilisant la formule démontrée à la question précédente, en utilisant un tableau, et en faisant attention aux indices et à l'initialisation (par exemple, $y_{n,0} = 0$), voici une fonction possible :

```
def partitions(n):
    y=[[1]]
    for i in range(1,n+1):
        y.append([0,1])
        for j in range(2,i+1):
            y[i].append(y[i][j-1]+y[i-j][min(j,i-j)])
    return y[n][n]
```

Par exemple, un appel `partitions(8)` donne 22.

Correction de l'exercice 18 ▲

On choisit d'abord l'élément de A qui convient. Il y a p choix. On choisit ensuite une partie du complémentaire de A , qui contient $n-p$ éléments : il y a 2^{n-p} choix. Par le principe multiplicatif, il y a donc $p \times 2^{n-p}$ parties de E qui contiennent exactement un et un seul élément de A .

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Y est une partie quelconque de $E \setminus X$ qui compte $n-p$ éléments. Il y a donc 2^{n-p} choix pour Y .

2. On choisit d'abord p le nombre d'éléments de X . Ce nombre étant fixé, il y a $\binom{n}{p}$ choix pour X . X étant fixé, il y a 2^{n-p} choix pour Y d'après la question précédente. Le nombre recherché est donc

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Notons $E_n = \{1, \dots, n\}$. Il y a exactement 2^n parties de E_n . Il y a moins de partitions de E_n en k parties que de choix de k éléments de $\mathcal{P}(E_n)$. Donc le nombre de partitions de E_n en k parties est inférieur ou égal à $\binom{2^n}{k}$. En particulier, il est fini.

2. Il n'existe pas de partitions de $\{1, \dots, n\}$ en k parties avec $k > n$. Donc $S(n, k) = 0$.

3. Il existe une seule partition de $\{1, \dots, n\}$ en une partie (l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ lui-même). Et donc $S(n, 1) = 1$.

4. On va séparer les partitions de $\{1, \dots, n\}$ en k parties en deux ensembles disjoints :

ou bien la partition comprend le singleton $\{n\}$. On complète alors cette partition en prenant une partition de $\{1, \dots, n-1\}$ en $k-1$ parties : il y a $S(n-1, k-1)$ telles partitions. ou bien la partition ne comprend pas le

singleton $\{n\}$. Pour construire une telle partition, il faut et il suffit de considérer une partition de $\{1, \dots, n-1\}$ en k parties, et d'ajouter $\{n\}$ à une de ces parties : il y a $S(n-1, k)$ partitions, et k choix pour ajouter $\{n\}$ à une de ces parties. Finalement, il y a $S(n-1, k) \times k$ telles partitions.

On en déduit que

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

5. ou bien la partition comprend le singleton $\{n\}$. On complète alors cette partition en prenant une partition de $\{1, \dots, n-1\}$ en $k-1$ parties : il y a $S(n-1, k-1)$ telles partitions.

6. ou bien la partition ne comprend pas le singleton $\{n\}$. Pour construire une telle partition, il faut et il suffit de considérer une partition de $\{1, \dots, n-1\}$ en k parties, et d'ajouter $\{n\}$ à une de ces parties : il y a $S(n-1, k)$ partitions, et k choix pour ajouter $\{n\}$ à une de ces parties. Finalement, il y a $S(n-1, k) \times k$ telles partitions.

7. def partition(n,k) : if ((k==0) and (n==0)) : return 1 if (k==0) : return 0 if (n==0) : return 0 return partition(n-1,k-1)+k*partition(n-1,k)

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Il existe une seule partition d'un ensemble à un seul élément, donc $B_1 = 1$. Il existe deux partitions de $\{a, b\}$: la partition $\{\{a\}, \{b\}\}$ et la partition $\{\{a, b\}\}$, donc $B_2 = 2$. On dispose de trois types de partitions pour $\{a, b, c\}$:

en une partie $\{\{a, b, c\}\}$. en deux parties, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$ et $\{\{b, c\}, \{a\}\}$. En trois parties, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

Finalement, on a prouvé que $B_3 = 5$.

2. Il existe une seule partition d'un ensemble à un seul élément, donc $B_1 = 1$.

3. Il existe deux partitions de $\{a, b\}$: la partition $\{\{a\}, \{b\}\}$ et la partition $\{\{a, b\}\}$, donc $B_2 = 2$.

4. On dispose de trois types de partitions pour $\{a, b, c\}$:

en une partie $\{\{a, b, c\}\}$. en deux parties, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$ et $\{\{b, c\}, \{a\}\}$. En trois parties, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

Finalement, on a prouvé que $B_3 = 5$.

5. en une partie $\{\{a, b, c\}\}$.

6. en deux parties, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$ et $\{\{b, c\}, \{a\}\}$.

7. En trois parties, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

8. Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Fixons a un élément de E . Dans une partition \mathcal{P} de E , il y a une partie A qui contient a . La partition \mathcal{P} est alors déterminée par A et par une partition de $E \setminus A$. On dénombre alors les partitions en faisant une somme sur tous les A possibles. Le cardinal de A peut varier entre 1 et $n+1$, le cardinal de E . Le cardinal k de A étant fixé, il y a $\binom{n}{k-1}$ choix possibles pour A (il reste $k-1$ éléments à choisir en dehors de a , parmi les n restants). Cet ensemble A étant fixé, il y a B_{n+1-k} partitions possibles de l'ensemble $E \setminus A$. On a donc prouvé que

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} B_k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Si f est une fonction strictement croissante, l'image de $\{1, \dots, p\}$ par f est une partie à p éléments de $\{1, \dots, n\}$. Réciproquement, si on considère une partie à p éléments de $\{1, \dots, n\}$, disons $\{x_1, \dots, x_p\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_p$, alors la fonction f définie sur $\{1, \dots, p\}$ à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ par $f(k) = x_k$ est une fonction strictement croissante, et deux choix de parties différentes donnent deux fonctions différentes. On en

déduit qu'il y a autant de fonctions strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ que de parties à p éléments dans $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$.

2. Posons, pour simplifier les notations, $g = \phi(f)$. Pour démontrer que g est strictement croissante, il suffit de prouver que $g(k+1) - g(k) > 0$ pour tout $k = 1, \dots, p-1$. Mais

$$g(k+1) - g(k) = f(k+1) + k + 1 - 1 - f(k) - k + 1 = f(k+1) - f(k) + 1 \geq 1$$

puisque f est croissante. Posons, pour simplifier les notations, $f = \psi(g)$. Pour démontrer que f est croissante, il suffit de prouver que $f(k+1) - f(k) \geq 0$ pour tout $k = 1, \dots, p-1$, sachant que $g(k+1) - g(k) \geq 1$ (fonction strictement croissante à valeurs dans les entiers). Mais on a

$$f(k+1) - f(k) = g(k+1) - k - 1 + 1 - g(k) + k - 1 = g(k+1) - g(k) - 1 \geq 0.$$

Notons A l'ensemble des fonctions croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ et B l'ensemble des fonctions strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n+p-1\}$. Alors ϕ réalise une bijection de A sur B , de réciproque ψ . Il suffit pour cela de remarquer que pour tout $g \in B$, $\phi \circ \psi(g) = g$ et que, pour tout $f \in A$, $\psi \circ \phi(f) = f$. Mais c'est immédiat par la définition de ϕ et ψ . On a donc

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) = \binom{n+p-1}{p}.$$

3. Posons, pour simplifier les notations, $g = \phi(f)$. Pour démontrer que g est strictement croissante, il suffit de prouver que $g(k+1) - g(k) > 0$ pour tout $k = 1, \dots, p-1$. Mais

$$g(k+1) - g(k) = f(k+1) + k + 1 - 1 - f(k) - k + 1 = f(k+1) - f(k) + 1 \geq 1$$

puisque f est croissante.

4. Posons, pour simplifier les notations, $f = \psi(g)$. Pour démontrer que f est croissante, il suffit de prouver que $f(k+1) - f(k) \geq 0$ pour tout $k = 1, \dots, p-1$, sachant que $g(k+1) - g(k) \geq 1$ (fonction strictement croissante à valeurs dans les entiers). Mais on a

$$f(k+1) - f(k) = g(k+1) - k - 1 + 1 - g(k) + k - 1 = g(k+1) - g(k) - 1 \geq 0.$$

5. Notons A l'ensemble des fonctions croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ et B l'ensemble des fonctions strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n+p-1\}$. Alors ϕ réalise une bijection de A sur B , de réciproque ψ . Il suffit pour cela de remarquer que pour tout $g \in B$, $\phi \circ \psi(g) = g$ et que, pour tout $f \in A$, $\psi \circ \phi(f) = f$. Mais c'est immédiat par la définition de ϕ et ψ . On a donc

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) = \binom{n+p-1}{p}.$$

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Il n'y a qu'une seule permutation de E qui est l'identité. Ce n'est pas un dérangement, $D_1 = 0$.

2. Des deux permutations de E , seule celle qui inverse les deux éléments est un dérangement : $D_2 = 1$.

3. Il y a $\binom{n}{k}$ choix de k éléments invariants parmi n . Une fois ces choix fixés, la permutation est un dérangement sur les $n-k$ autres éléments. Il y a donc $\binom{n}{k} D_{n-k}$ telles permutations. La convention $D_0 = 1$ fait que cette formule reste vraie si $k = n$. On sépare ensuite les permutations de E en fonction de leur nombre de points invariants. Comme les ensembles que l'on obtient sont disjoints, et qu'il y a en tout $n!$ permutations de E , on obtient :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k}.$$

Pour obtenir la formule demandée, il faut ensuite faire le changement d'indices $l = n - k$, et utiliser la propriété des coefficients binômiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

4. On applique la relation pour $n = 3$. On obtient :

$$3! = D_0 + 3D_1 + 3D_2 + D_3 \implies D_3 = 2.$$

De même, en appliquant la relation pour $n = 4$, on trouve $D_4 = 9$, et pour $n = 5$, $D_5 = 44$.

5. Une telle association correspond à une permutation de $\{1, \dots, 5\}$. Il y a $5! = 120$ telles permutations. Si aucun couple légitime n'est reconstitué, c'est que la permutation précédente est un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ telles associations, et la probabilité recherchée est $44/120 = 11/30$. Si un seul couple légitime est reconstitué, il y a 5 choix pour le couple. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ telles possibilités. La probabilité recherchée est $45/120 = 3/8$. On compte aussi le cas où deux couples légitimes sont reconstitués : il y a $\binom{5}{2} = 10$ choix de 2 couples parmi 5. Pour les autres, il faut une association qui soit un dérangement : $10 \times D_3 = 20$. Le nombre d'associations où il y a plus de couples illégitimes que de couples légitimes est donc : $20 + 45 + 44 = 109$, ce qui donne une probabilité de $109/120 > 1/2$. Le bal masqué favorise les rencontres !

6. Une telle association correspond à une permutation de $\{1, \dots, 5\}$. Il y a $5! = 120$ telles permutations.

7. Si aucun couple légitime n'est reconstitué, c'est que la permutation précédente est un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ telles associations, et la probabilité recherchée est $44/120 = 11/30$.

8. Si un seul couple légitime est reconstitué, il y a 5 choix pour le couple. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ telles possibilités. La probabilité recherchée est $45/120 = 3/8$.

9. On compte aussi le cas où deux couples légitimes sont reconstitués : il y a $\binom{5}{2} = 10$ choix de 2 couples parmi 5. Pour les autres, il faut une association qui soit un dérangement : $10 \times D_3 = 20$. Le nombre d'associations où il y a plus de couples illégitimes que de couples légitimes est donc : $20 + 45 + 44 = 109$, ce qui donne une probabilité de $109/120 > 1/2$. Le bal masqué favorise les rencontres !

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Si $p > n$, il n'y a pas de surjection de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$. On a donc $S(n, p) = 0$. Lorsque $p = n$, les surjections de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, n\}$ sont les bijections de $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même. Il y en a donc $n! = S(n, n)$. Lorsque $p = 1$, toute application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1\}$ est une surjection. Mais il y a une seule application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1\}$. On a donc $S(n, 1) = 1$. Lorsque $p = 2$, il y a deux applications qui ne sont pas surjectives : celle qui envoie tous les éléments sur 1 et celle qui envoie tous les éléments sur 2. De plus, il y a 2^n applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, 2\}$. On en déduit que $S(n, 2) = 2^n - 2$.

2. Si $p > n$, il n'y a pas de surjection de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$. On a donc $S(n, p) = 0$.

3. Lorsque $p = n$, les surjections de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, n\}$ sont les bijections de $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même. Il y en a donc $n! = S(n, n)$.

4. Lorsque $p = 1$, toute application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1\}$ est une surjection. Mais il y a une seule application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1\}$. On a donc $S(n, 1) = 1$.

5. Lorsque $p = 2$, il y a deux applications qui ne sont pas surjectives : celle qui envoie tous les éléments sur 1 et celle qui envoie tous les éléments sur 2. De plus, il y a 2^n applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, 2\}$. On en déduit que $S(n, 2) = 2^n - 2$.

6. Lorsque l'on étudie les surjections de $\{1, \dots, n+1\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, un unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents, et tous les autres en ont un seul. On peut donc caractériser une surjection par le choix de cet élément et de ses deux antécédents, puis par une bijection entre les $n-1$ autres éléments. On a donc

$$S(n+1, n) = n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

7. Soit s une surjection de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$. Il y a p façons de choisir la valeur de $s(n)$. Une fois cette valeur choisie, notons s' la restriction de s à $\{1, \dots, n-1\}$. Remarquons que tous les éléments de $\{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$ sont atteints par s' . On distingue alors deux cas :

Soit i est atteint par s' , et alors s' est une surjection de $\{1, \dots, n-1\}$ sur $\{1, \dots, p\}$. Il y a $S(n-1, p)$ possibilités ; Soit i n'est pas atteint par s' , et s' est une surjection de $\{1, \dots, n-1\}$ sur $\{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. Il y a $S(n-1, p-1)$ possibilités.

Finalement, on obtient que

$$S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1)).$$

8. Soit i est atteint par s' , et alors s' est une surjection de $\{1, \dots, n-1\}$ sur $\{1, \dots, p\}$. Il y a $S(n-1, p)$ possibilités ;

9. Soit i n'est pas atteint par s' , et s' est une surjection de $\{1, \dots, n-1\}$ sur $\{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. Il y a $S(n-1, p-1)$ possibilités.

10. On programme la fonction suivante S , d'arguments n et p deux entiers naturels non nuls.

Fonction $S(n,p)$

Si $p > n$, retourner 0. Si $p=1$, retourner 1. Sinon, retourner $p(S(n-1,p-1)+S(n-1,p))$

Seriez-vous capables de prouver que cet algorithme se termine quelles que soient les entrées n et p ?

11. On va prouver ce résultat par récurrence sur n . Si $n = 1$, le résultat est clair si $p = 1$; si $p > 1$, alors $S(1,p) = 0$ qui est bien égal à

$$\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} p \binom{p-1}{k-1} = -p(1-1)^{p-1} = 0$$

où on a utilisé

$$p \binom{p-1}{k-1} = k \binom{p}{k}.$$

Supposons le résultat prouvé au rang $n-1$, et prouvons-le au rang n . Si $p = 1$, à nouveau l'égalité est évidente.

On peut donc supposer $p > 1$ et on écrit

$$\begin{aligned} S(n,p) &= p(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)) \\ &= p \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \binom{p-1}{k} k^{n-1} + \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^{n-1} \right) \\ &= p \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} k^{n-1} \left(\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k} \right) + k^{n-1} \right) \end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule du triangle de Pascal et il vient :

$$\begin{aligned} S(n,p) &= p \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} k^{n-1} \binom{p-1}{k-1} + k^{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} p \binom{p-1}{k-1} k^{n-1}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en remarquant à nouveau que

$$p \binom{p-1}{k-1} = k \binom{p}{k}.$$
