

1 Majorer, minorer

Exercice 1 ★★ Pour réviser... –

Encadrer $x + y$, $x - y$, xy et x/y sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[667]

Exercice 2 ★★ Des inéquations –

Déterminer les nombres réels y solution des inéquations suivantes :

$$1. (y + 1)(y - 1) > (y + 1)^2 \quad 2. \lambda y + 7 \geq 3y - 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \text{ donné.}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2285]

Exercice 3 ★★ Une inéquation avec des racines carrées –

Résoudre l'inéquation $x - 1 \leq \sqrt{x + 2}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2278]

Exercice 4 ★ Inéquations avec des logarithmes –

Résoudre les inéquations suivantes (on précisera le domaine de définition) :

$$1. (2x - 7) \ln(x + 1) > 0 \quad 2. \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq 0 \\ 3. (\ln(x) + 1)(\ln(x) - 2) > 0$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2338]

Exercice 5 ★ Inégalités –

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[583]

Exercice 6 ★ Somme et factorielles –

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(n + 1)! \geq \sum_{k=1}^n k! \quad .$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[448]

2 Valeur absolue

Exercice 7 ★ Maximum et valeur absolue –

Soient x et y deux nombres réels. Démontrer que

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \\ \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Exercice 8 ★ **Egalités et inégalités avec des valeurs absolues –**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+3| = 5$
2. $|x+3| \leq 5$
3. $|x+2| > 7$
4. $|2x-4| \leq |x+2|$

Exercice 9 ★★ **Inégalités –**

Résoudre dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^* les inégalités suivantes :

1. $|x+1| + |x-3| \leq 6$
2. $\left| \frac{1}{x} - 2 \right| \leq 3.$

Exercice 10 ★★★ **Équations et inéquations avec des valeurs absolues –**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+12| = |x^2-8|$
2. $|x+12| \leq |x^2-8|.$

Exercice 11 ★★★ **Inégalités avec des valeurs absolues –**

Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$
2. $1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$
3. $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$

Exercice 12 ★★★ **Inégalité avec un maximum et des valeurs absolues –**

Soit x, y deux réels non nuls. Démontrer que

$$\max(|x|, |y|) \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leq 2|x-y|.$$

3 Partie entière

Exercice 13 ★ **Partie entière du successeur –**

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$

Exercice 14 ★ **Un calcul de partie entière –**

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Démontrer que $2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1.$

2. En déduire la valeur de $\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3055]

Exercice 15 ★★ Une somme avec des parties entières –

Soit x un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$ et $v_n = u_n/n^2$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n \leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2}x.$$

2. En déduire la limite de la suite (v_n) .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3054]

Exercice 16 ★★ Partie entière et somme –

Soient a, b deux réels. Prouver que

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[539]

Exercice 17 ★★ Produit et division –

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[540]

Exercice 18 ★★ Une somme –

Calculer $\sum_{k=1}^{2010} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[541]

Exercice 19 ★★★★★ Partie entière et somme –

Soit x, y des réels. Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2168]

Exercice 20 ★★ Avec des racines carrées –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[543]

Exercice 21 ★★★★★ Partie entière et racine carrée –

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, comparer $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3053]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Multiplier par $-y$ plutôt que par y .

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Développer.
 2. Discuter suivant la position de λ par rapport à 3.
-

Indication pour l'exercice 3 ▲

Séparer l'étude suivant que $x - 1 \leq 0$ ou $x - 1 > 0$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Faire un tableau de signes.
 2. Commencer par rechercher l'ensemble de définition de la quantité de gauche. Puis, en remarquant que $\ln(1) = 0$, utiliser la croissance du logarithme pour se ramener à une équation sans logarithme.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

Introduire deux fonctions à étudier !

Indication pour l'exercice 6 ▲

Utiliser que $k! \leq n!$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Séparer les cas $x \leq y$ et $x > y$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Faire un dessin !
 2. Idem
 3. Idem
 4. Discuter suivant les signes respectifs de chaque membre.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Séparer l'étude en trois intervalles, pour enlever les valeurs absolues.
 2. Procéder également par disjonction de cas.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

Factoriser $x^2 - 8$, puis résoudre l'équation ou l'inéquation en enlevant les valeurs absolues. Il y aura plusieurs cas à distinguer !

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Écrire $2x = (x + y) + (x - y)$.
 2. Poser $u = x - 1$ et $v = y - 1$.
 3. La fonction $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Pour que le max de deux nombres soit inférieur à un troisième nombre, il suffit que chacun de ces deux nombres soit inférieur ou égal au troisième. Ici, il suffit donc de démontrer que

$$|x| \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leq 2|x - y|$$

et

$$|y| \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leq 2|x - y|.$$

Pour démontrer la première inégalité par exemple, faire entrer $|x|$ dans la valeur absolue, puis introduire y .

Indication pour l'exercice 13 ▲

Utiliser la définition.

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Étudier l'inégalité "au carré".
 2. Développer $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2$, utiliser l'inégalité précédente, puis la définition de la partie entière.
-

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Encadrer $\lfloor kx \rfloor$.
 2. Utiliser le théorème des gendarmes.
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

Encadrer $a + b$ en utilisant $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$, puis revenir à la définition de $\lfloor a + b \rfloor$.

Indication pour l'exercice 17 ▲

Raisonner par double inégalité en partant de $\lfloor nx \rfloor \leq nx$, puis de $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Ranger les entiers k entre deux carrés parfaits consécutifs, ie $n^2 \leq k < (n+1)^2$.

Indication pour l'exercice 19 ▲

Écrire $x = n + s$ et $y = m + t$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $s, t \in [0, 1[$. Si $s + t < 1$, c'est facile. Si $s + t \geq 1$, c'est plus difficile, mais dans ce cas, s et t ne peuvent pas être simultanément trop petits.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Formule du binôme, puis encadrer $(2 - \sqrt{3})^n$.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Ces deux quantités sont égales. Pour le démontrer, on peut prouver une double inégalité, en partant de $\lfloor x \rfloor \leq x$ d'une part $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On a $3 \leq x \leq 6$ et $-4 \leq y \leq -2$. En sommant ces inégalités, on en déduit que $-1 \leq x + y \leq 4$.
2. On a $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$. En sommant ces inégalités, on en déduit que $5 \leq x - y \leq 10$.
3. On ne peut multiplier des inégalités que lorsqu'elles concernent des réels positifs. On va donc écrire $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$. En multipliant ces inégalités, on trouve $6 \leq -xy \leq 24$ soit finalement l'encadrement $-24 \leq xy \leq -6$.
4. On commence par remarquer que

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{4} \implies \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}.$$

En multipliant les inégalités, il vient

$$\frac{3}{4} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{6}{2} = 3$$

soit finalement l'encadrement

$$-3 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{4}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. L'erreur serait de simplifier directement par $y + 1$, même s'il apparaît factorisé de chaque côté. L'inéquation $au > av$ n'est pas équivalente à $u > v$, cela dépend du signe de a . Ici, le plus simple est de tout développer car des simplifications vont apparaître. On a en effet

$$(y + 1)(y - 1) > (y + 1)^2 \iff y^2 - 1 > y^2 + 2y + 1 \iff y < -1.$$

L'ensemble des solutions est donc $] -\infty, -1[$.

2. Il faut discuter suivant la valeur de λ ... D'abord, remarquons que l'inéquation est équivalente à

$$(\lambda - 3)y \geq -5\lambda - 7.$$

Si $\lambda = 3$, alors elle devient $0 \geq -22$ qui est toujours vrai. L'ensemble des solutions est \mathbb{R} . Si $\lambda > 3$, alors $\lambda - 3 > 0$ et l'équation est équivalente à

$$y \geq \frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3}.$$

L'ensemble des solutions est $\left[\frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3}, +\infty \right[$. Si $\lambda < 3$, alors $\lambda - 3 < 0$ et l'équation est équivalente à

$$y \leq \frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3}.$$

L'ensemble des solutions est $\left] -\infty, \frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3} \right]$.

3. Si $\lambda = 3$, alors elle devient $0 \geq -22$ qui est toujours vrai. L'ensemble des solutions est \mathbb{R} .
4. Si $\lambda > 3$, alors $\lambda - 3 > 0$ et l'équation est équivalente à

$$y \geq \frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3}.$$

L'ensemble des solutions est $\left[\frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3}, +\infty \right[$.

5. Si $\lambda < 3$, alors $\lambda - 3 < 0$ et l'équation est équivalente à

$$y \leq \frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3}.$$

L'ensemble des solutions est $\left] -\infty, \frac{-5\lambda - 7}{\lambda - 3} \right]$.

Correction de l'exercice 3 ▲

D'abord, cette inéquation n'a de sens que pour $x \geq -2$ ce que l'on supposera désormais. Ensuite, si $x - 1 \leq 0$, c'est-à-dire si $x \leq 1$, cette inéquation est vérifiée. On suppose donc désormais $x > 1$. Puisque tout est positif, l'inéquation est sur l'intervalle $]1, +\infty[$ équivalente à $(x-1)^2 \leq x+2$, c'est-à-dire $x^2 - 3x - 1 \leq 0$. On étudie le signe du trinôme en calculant son discriminant (il vaut 13) et en cherchant les racines de $x^2 - 3x - 1 = 0$, qui sont $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \simeq -0,3$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3,3$. Ainsi, $x^2 - 3x - 1$ est négatif si $x \in [x_1, x_2]$. Comme on travaillait sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on ne doit considérer que les réels dans l'intervalle $]1, x_2]$. Finalement, en ajoutant l'intervalle $[-2, 1]$ déterminé plus tôt, on a prouvé que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-2, x_2]$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Cette inéquation a un sens lorsque $x > -1$. De plus, $2x - 7$ est strictement négatif sur $] -1, 7/2[$, strictement positif sur $]7/2, +\infty[$ tandis que $\ln(x+1)$ est strictement négatif sur $] -1, 0[$ et strictement positif sur $]0, +\infty[$. En dressant le tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -1, 0[\cup]7/2, +\infty[$.

2. Cette inéquation a un sens si et seulement si $\frac{x+1}{3x-5} > 0$. En effectuant un tableau de signes, on déduit que son domaine de définition est $\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]5/3, +\infty[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. L'inéquation est équivalente à

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq \ln(1) \iff \frac{x+1}{3x-5} \leq 1$$

par croissance de la fonction logarithme. Il faut donc résoudre cette dernière inéquation. Mais

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3x-5} \leq 1 &\iff \frac{x+1}{3x-5} - 1 \leq 0 \\ &\iff \frac{x+1-3x+5}{3x-5} \leq 0 \\ &\iff \frac{-2x+6}{3x-5} \leq 0. \end{aligned}$$

En effectuant un tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty, 5/3[\cup]3, +\infty[$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$$

(attention ! l'intervalle est bien ouvert en -1 et fermé en 3 !).

3. Rappelons que $\ln(e^{-1}) = -1$ et que $\ln(e^2) = 2$. Par croissance de la fonction logarithme, on a $\ln(x) + 1 \geq 0 \iff x \geq e^{-1}$ et $\ln(x) - 2 \geq 0 \iff x \geq e^2$. En dressant un tableau de signes, on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0, e^{-1}[\cup]e^2, +\infty[$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On pose, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Alors f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, $f(0) = 0$, donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$ ce qui entraîne $\ln(1+x) \leq x$. Pour démontrer l'autre inégalité, on introduit cette fois la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

g est donc croissante sur \mathbb{R}_+ et $g(0) \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \geq 0 \iff x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Pour chaque entier k dans $\{1, \dots, n\}$, on a $k! \leq n!$. On obtient donc

$$\sum_{k=1}^n k! \leq \sum_{k=1}^n n! = n \times n!$$

puisque la somme de droite est une somme de termes constants. Puisque $n \leq n+1$, on obtient bien

$$\sum_{k=1}^n k! \leq (n+1) \times n! = (n+1)! \quad .$$

Correction de l'exercice 7 ▲

On va séparer deux cas :

Si $x \geq y$, alors $x - y \geq 0$ et donc $|x - y| = x - y$. On a aussi $\max(x, y) = x$ et

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x.$$

Si $x < y$, alors $|x - y| = y - x$ et $\max(x, y) = y$. Dans ce cas

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + y - x) = y.$$

Dans les deux cas, on a bien démontré la relation demandée. La démonstration pour le minimum est exactement similaire.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On cherche les réels qui sont à une distance exactement égale à 5 de -3 . On trouve $\mathcal{S} = \{2, -8\}$.
2. On cherche les réels qui sont à une distance inférieure ou égale à 5 de -3 . On trouve $\mathcal{S} = [-8, 2]$.
3. On cherche les réels qui sont à une distance strictement supérieure à 7 de -2 . On trouve $\mathcal{S} =]-\infty, -9[\cup]5, +\infty[$.

4. $2x - 4$ change de signe en 2, et $x + 2$ change de signe en -2. On distingue alors 3 cas :

Si $x \leq -2$, alors $|x + 2| = -x - 2$ et $|2x - 4| = -2x + 4$. L'équation est alors équivalente à

$$-2x + 4 \leq -x - 2 \iff x \geq 6$$

ce qui est incompatible avec $x \leq -2$. Si $x \in [-2, 2]$, alors $|x + 2| = x + 2$ et $|2x - 4| = -2x + 4$. L'équation est alors équivalente à

$$-2x + 4 \leq x + 2 \iff 3x \geq 2 \iff x \geq 2/3.$$

L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $[2/3, 2]$. Si $x \geq 2$, alors $|x + 2| = x + 2$ et $|2x - 4| = 2x - 4$, et donc l'équation est équivalente à

$$2x - 4 \leq x + 2 \iff x \leq 6.$$

L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $[2, 6]$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [2/3, 6]$.

5. Si $x \leq -2$, alors $|x + 2| = -x - 2$ et $|2x - 4| = -2x + 4$. L'équation est alors équivalente à

$$-2x + 4 \leq -x - 2 \iff x \geq 6$$

ce qui est incompatible avec $x \leq -2$.

6. Si $x \in [-2, 2]$, alors $|x+2| = x+2$ et $|2x-4| = -2x+4$. L'équation est alors équivalente à

$$-2x+4 \leq x+2 \iff 3x \geq 2 \iff x \geq 2/3.$$

L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $[2/3, 2]$.

7. Si $x \geq 2$, alors $|x+2| = x+2$ et $|2x-4| = 2x-4$, et donc l'équation est équivalente à

$$2x-4 \leq x+2 \iff x \leq 6.$$

L'intervalle qui nous intéresse ici est donc $[2, 6]$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions de cette inéquation. On va déterminer \mathcal{S} en séparant l'étude en trois cas, afin d'enlever les valeurs absolues.

Si $x \geq 3$, alors $|x+1| = x+1$ et $|x-3| = x-3$. L'inéquation est donc équivalente à $2x-2 \leq 6$ c'est-à-dire à $x \leq 4$. On a donc $\mathcal{S} \cap [3, +\infty[= [3, 4]$. Si $x \in [-1, 3]$, alors $|x+1| = x+1$ et $|x-3| = -x+3$. L'inéquation est alors équivalente à $x+1-x+3 \leq 6$ ou encore $4 \leq 6$. C'est toujours vrai et donc $\mathcal{S} \cap [-1, 3] = [-1, 3]$. Si $x \leq -1$, on a $|x+1| = -x-1$ et $|x-3| = -x+3$. L'inéquation est dans ce cas équivalente à $-2x+2 \leq 6$, soit $x \geq -2$. Ainsi, $\mathcal{S} \cap]-\infty, -1] = [-2, -1]$.

Finalement, on a prouvé que $\mathcal{S} = [-2, 4]$.

2. Si $x \geq 3$, alors $|x+1| = x+1$ et $|x-3| = x-3$. L'inéquation est donc équivalente à $2x-2 \leq 6$ c'est-à-dire à $x \leq 4$. On a donc $\mathcal{S} \cap [3, +\infty[= [3, 4]$.

3. Si $x \in [-1, 3]$, alors $|x+1| = x+1$ et $|x-3| = -x+3$. L'inéquation est alors équivalente à $x+1-x+3 \leq 6$ ou encore $4 \leq 6$. C'est toujours vrai et donc $\mathcal{S} \cap [-1, 3] = [-1, 3]$.

4. Si $x \leq -1$, on a $|x+1| = -x-1$ et $|x-3| = -x+3$. L'inéquation est dans ce cas équivalente à $-2x+2 \leq 6$, soit $x \geq -2$. Ainsi, $\mathcal{S} \cap]-\infty, -1] = [-2, -1]$.

5. Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions de cette inéquation. On va là encore procéder par disjonction de cas :

D'une part, si $x \in]0, 1/2]$, on a $\frac{1}{x} - 2 \geq 0$. Sur cet intervalle, l'inéquation devient

$$\frac{1}{x} - 2 \leq 3 \iff \frac{1}{x} \leq 5 \iff x \geq 1/5.$$

On a donc $\mathcal{S} \cap]0, 1/2] = [1/5, 1/2]$. Si $x > 1/2$, on a $\frac{1}{x} - 2 \leq 0$, et sur cet intervalle l'inéquation devient

$$2 - \frac{1}{x} \leq 3 \iff \frac{1}{x} \geq -1.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée lorsque $x > 1/2$ et donc $\mathcal{S} \cap]1/2, +\infty[=]1/2, +\infty[$. Si $x < 0$, on a encore $\frac{1}{x} - 2 \leq 0$, et sur cet intervalle l'inéquation devient également

$$2 - \frac{1}{x} \leq 3 \iff \frac{1}{x} \geq -1.$$

Puisque maintenant $x < 0$, ceci est équivalent à $x \leq -1$. Ainsi, on a prouvé que $\mathcal{S} \cap]-\infty, 0[=]-\infty, -1]$.

Finalement, on a prouvé que l'ensemble des solutions est $] -\infty, -1] \cup [1/5, +\infty[$.

6. D'une part, si $x \in]0, 1/2]$, on a $\frac{1}{x} - 2 \geq 0$. Sur cet intervalle, l'inéquation devient

$$\frac{1}{x} - 2 \leq 3 \iff \frac{1}{x} \leq 5 \iff x \geq 1/5.$$

On a donc $\mathcal{S} \cap]0, 1/2] = [1/5, 1/2]$.

7. Si $x > 1/2$, on a $\frac{1}{x} - 2 \leq 0$, et sur cet intervalle l'inéquation devient

$$2 - \frac{1}{x} \leq 3 \iff \frac{1}{x} \geq -1.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée lorsque $x > 1/2$ et donc $\mathcal{S} \cap]1/2, +\infty[=]1/2, +\infty[$.

8. Si $x < 0$, on a encore $\frac{1}{x} - 2 \leq 0$, et sur cet intervalle l'inéquation devient également

$$2 - \frac{1}{x} \leq 3 \iff \frac{1}{x} \geq -1.$$

Puisque maintenant $x < 0$, ceci est équivalent à $x \leq -1$. Ainsi, on a prouvé que $\mathcal{S} \cap]-\infty, 0[=]-\infty, -1[$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. On factorise $x^2 - 8$ en $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$. Ceci permet de distinguer plusieurs cas pour résoudre l'équation, en enlevant les valeurs absolues.

Si $x \leq -12$, on a $|x + 12| = -x - 12$ et $|x^2 - 8| = x^2 - 8$. L'équation est équivalente à $x^2 - 8 = -x - 12$. Cette équation n'a pas de solutions réelles. Si $x \in [-12, -2\sqrt{2}]$ ou $x \in [2\sqrt{2}, +\infty[$, alors $|x + 12| = x + 12$ et $|x^2 - 8| = x^2 - 8$. L'équation est équivalente à $x^2 - 8 = x + 12$. Les solutions sont -4 et 5. Elles sont toutes deux dans l'intervalle considéré. Si $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, alors $|x^2 - 8| = -x^2 + 8$ et $|x + 12| = x + 12$. L'équation est équivalente à $-x^2 + 8 = x + 12$, dont on a déjà observé qu'elle n'avait pas de solutions.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-4, 5\}$. Remarquons que dans cette première question, on aurait pu éviter un raisonnement par disjonction de cas en remarquant que $|a| = |b|$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

2. Si $x \leq -12$, on a $|x + 12| = -x - 12$ et $|x^2 - 8| = x^2 - 8$. L'équation est équivalente à $x^2 - 8 = -x - 12$. Cette équation n'a pas de solutions réelles.

3. Si $x \in [-12, -2\sqrt{2}]$ ou $x \in [2\sqrt{2}, +\infty[$, alors $|x + 12| = x + 12$ et $|x^2 - 8| = x^2 - 8$. L'équation est équivalente à $x^2 - 8 = x + 12$. Les solutions sont -4 et 5. Elles sont toutes deux dans l'intervalle considéré.

4. Si $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, alors $|x^2 - 8| = -x^2 + 8$ et $|x + 12| = x + 12$. L'équation est équivalente à $-x^2 + 8 = x + 12$, dont on a déjà observé qu'elle n'avait pas de solutions.

5. On applique exactement le même raisonnement en scindant en trois intervalles d'étude.

Si $x \leq -12$, l'inéquation est équivalente à $-x - 12 \leq x^2 - 8$ qui est toujours vérifiée (rappelons que l'équation du second degré associé n'a pas de solutions). Si $x \in [-12, -2\sqrt{2}]$ ou $x \in [2\sqrt{2}, +\infty[$, alors l'inéquation est équivalente à $x + 12 \leq x^2 - 8$. L'ensemble des solutions de cette équation est $] -\infty, -4] \cup [5, +\infty[$. Dans l'intervalle considéré, on trouve $[-12, -4] \cup [5, +\infty[$. Si $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, alors l'inéquation est équivalente à $x + 12 \leq -x^2 + 8$ qui cette fois n'est jamais vérifiée (l'équation du second degré associé n'a toujours pas de solutions, mais on a inversé le sens de l'inégalité).

Finalement, l'ensemble des solutions est $] -\infty, -4] \cup [5, +\infty[$.

6. Si $x \leq -12$, l'inéquation est équivalente à $-x - 12 \leq x^2 - 8$ qui est toujours vérifiée (rappelons que l'équation du second degré associé n'a pas de solutions).

7. Si $x \in [-12, -2\sqrt{2}]$ ou $x \in [2\sqrt{2}, +\infty[$, alors l'inéquation est équivalente à $x + 12 \leq x^2 - 8$. L'ensemble des solutions de cette équation est $] -\infty, -4] \cup [5, +\infty[$. Dans l'intervalle considéré, on trouve $[-12, -4] \cup [5, +\infty[$.

8. Si $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, alors l'inéquation est équivalente à $x + 12 \leq -x^2 + 8$ qui cette fois n'est jamais vérifiée (l'équation du second degré associé n'a toujours pas de solutions, mais on a inversé le sens de l'inégalité).

Correction de l'exercice 11 ▲

1. On écrit $2x = (x + y) + (x - y)$ et $2y = (x + y) - (x - y)$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$2|x| \leq |x + y| + |x - y| \text{ et } 2|y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

Il suffit de sommer ces deux inégalités pour trouver le résultat voulu.

2. Posons $u = x - 1$ et $v = y - 1$. Alors

$$1 + |xy - 1| = 1 + |uv + u + v| \leq 1 + |u| + |v| + |uv| = (1 + |u|)(1 + |v|) = (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|).$$

3. Une rapide étude montre que la fonction $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $|x + y| \leq |x| + |y|$,

on en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour que le max de deux nombres soit inférieur à un troisième nombre, il suffit que chacun de ces deux nombres soit inférieur ou égal au troisième. Ici, il suffit donc de démontrer que

$$|x| \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leq 2|x-y|$$

et

$$|y| \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \leq 2|x-y|.$$

Par symétrie du rôle joué par x et y , on ne va démontrer que la première inégalité. Pour cela, on écrit

$$|x| \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| = \left| x - \frac{|x|}{|y|} y \right|.$$

Ensuite, on fait apparaître y dans le membre de droite et on utilise l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire on écrit que

$$\left| x - \frac{|x|}{|y|} y \right| = \left| x - y + y - \frac{|x|}{|y|} y \right| \leq |x-y| + \left| y - \frac{|x|}{|y|} y \right|.$$

Il reste à démontrer que

$$\left| y - \frac{|x|}{|y|} y \right| \leq |x-y|.$$

Pour cela, on écrit que

$$\left| y - \frac{|x|}{|y|} y \right| = |y| \left| 1 - \frac{|x|}{|y|} \right| = |y| \times \left| \frac{|y| - |x|}{|y|} \right| = ||x| - |y||.$$

On conclut en appliquant l'inégalité triangulaire dont une conséquence est que

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Notons $m = \lfloor x+1 \rfloor$. Par définition, m est l'unique entier vérifiant

$$m \leq x+1 < m+1.$$

Maintenant, on sait aussi que

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$$

et donc, si on pose $n = \lfloor x \rfloor$, on a aussi

$$n+1 \leq x+1 < (n+1)+1.$$

Par unicité de l'entier m vérifiant la première inégalité, on en déduit que $m = n+1$, ce qui est exactement le résultat demandé.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Remarquons que l'on a

$$2n \cdot 2n \leq 2n \cdot (2n+2) < (2n+1) \cdot (2n+1)$$

(l'inégalité de droite se démontrant par exemple en développant les deux membres). La fonction racine carrée étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on obtient bien l'inégalité demandée.

2. Développons

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = n + (n+1) + 2\sqrt{n(n+1)} = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}.$$

D'après l'inégalité précédente,

$$4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2.$$

Par définition de la partie entière,

$$\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n+1.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Pour chaque $k \geq 1$, on a

$$kx - 1 \leq \lfloor kx \rfloor \leq kx.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 1 à n , et on trouve

$$\sum_{k=1}^n (kx - 1) \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n kx.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^n kx = \left(\sum_{k=1}^n k \right) x = \frac{n(n+1)}{2} x$$

et

$$\sum_{k=1}^n (kx - 1) = \frac{n(n+1)}{2} x - n.$$

2. Divisant cette inégalité par n^2 , qui est positif, on obtient pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n+1}{2n} x - \frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n} x.$$

Or, $\frac{n+1}{2n} x - \frac{1}{n}$ tend vers $x/2$ et $\frac{n+1}{2n} x$ tend vers $x/2$ si n tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, on déduit que (v_n) converge vers $x/2$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Des inégalités $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ et $\lfloor b \rfloor \leq b < \lfloor b \rfloor + 1$, on en déduit

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a + b < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2.$$

Or, $\lfloor a + b \rfloor$ est le plus grand entier n tel que $n \leq a + b$. Puisque $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a + b$, on en déduit qu $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor$. De même, $\lfloor a + b \rfloor + 1$ est le plus petit entier m tel que $m > a + b$. Puisque $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2 > a + b$, on en déduit $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2 \geq \lfloor a + b \rfloor + 1$, ce qui est l'autre inégalité demandée.

Correction de l'exercice 17 ▲

D'une part on a $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ donc

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

et puisque la fonction partie entière est croissante :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor.$$

D'autre part, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ ou encore

$$\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor.$$

Maintenant, puisque $n\lfloor x \rfloor$ est un entier, $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ et donc

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

En reprenant la partie entière de cette inégalité, on trouve

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

ce qui est l'autre inégalité désirée. Une autre méthode est d'introduire la fonction ϕ définie sur \mathbb{R} par

$$\phi(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

Il est facile de voir que ϕ est périodique de période 1. En effet, on a

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

et

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor n(x+1) \rfloor}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx + n \rfloor}{n} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que $\phi(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$. Mais pour $x \in [0, 1[$, on a $\lfloor x \rfloor = 0$ et

$$\lfloor nx \rfloor < n$$

d'où

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < 1$$

et

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0.$$

L'idée est très simple. Entre deux carrés parfaits consécutifs, la valeur de $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ est connue. Plus précisément, si $n^2 \leq k < (n+1)^2$, alors $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = n$. De plus, entre deux carrés parfaits consécutifs, il y a exactement $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ entiers. Enfin, le plus grand carré inférieur ou égal à 2010 est $44^2 = 1936$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2010} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{n=1}^{43} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \sum_{k=1936}^{2010} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \\ &= \sum_{n=1}^{43} n(2n+1) + (2010 - 1936 + 1) \times 44. \end{aligned}$$

On calcule ces sommes, sachant que $\sum_{n=1}^p n^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ et on trouve finalement que la somme fait 59114.

Correction de l'exercice 19 ▲

Écrivons $x = n + s$ et $y = m + t$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $s, t \in [0, 1[$. Si $s + t < 1$, alors

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor = n + (n + m) + m = 2n + 2m.$$

Puisque $2n \leq \lfloor 2x \rfloor$ et $2m \leq \lfloor 2y \rfloor$, le résultat est démontré. Si $s + t \geq 1$ (et dans ce cas $s + t < 2$), on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor = n + (n + m + 1) + m = 2n + 2m + 1.$$

Mais alors, on a ou bien $s \in [1/2, 1[$, ou bien $t \in [1/2, 1[$ (il est aussi possible que s et t soient dans $[1/2, 1[$). Supposons par exemple que $s \in [1/2, 1[$. Alors $2x = 2n + 2s = (2n + 1) + (2s - 1)$ où $2s - 1 \in [0, 1[$. Ainsi, $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$ et comme $\lfloor 2y \rfloor \geq 2m$, le résultat est démontré. La démonstration est exactement similaire si on suppose que $t \in [1/2, 1[$.

Correction de l'exercice 20 ▲

Calculons $S = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. On trouve

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \sqrt{3}^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (1 + (-1)^k) \sqrt{3}^k. \end{aligned}$$

Maintenant, si $k = 2p$ est pair, alors $(1 + (-1)^k) \sqrt{3}^k = 2 \cdot 3^p$ est un entier pair, et si k est impair, $(1 + (-1)^k) \sqrt{3}^k = 0$. On en déduit que S est bien un entier pair, comme somme d'entiers pairs. De plus, on a $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ et donc $0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1$. On en déduit que

$$S - 1 \leq (2 + \sqrt{3})^n < S$$

ce qui prouve que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est $S - 1$. C'est donc un entier impair.

Correction de l'exercice 21 ▲

Ces deux quantités sont égales. On va le prouver en établissant une double inégalité. D'une part, on remarque que $\lfloor x \rfloor \leq x$. Par croissance de la fonction racine carrée, on a

$$\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x}$$

puis par croissance de la partie entière, on obtient la première inégalité

$$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor.$$

D'autre part, on remarque que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$. Puisque la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, on déduit que

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq x.$$

Mais le membre de gauche est un entier, et donc

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq \lfloor x \rfloor.$$

On utilise à nouveau la croissance de la racine carrée pour obtenir

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor}.$$

Le membre de gauche étant à nouveau un entier, prenant la partie entière, on trouve l'autre inégalité :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor.$$
