

1 Dérivée en un point - Nombre dérivée

Exercice 1 ★★★ Calculs de limites en utilisant le nombre dérivé –

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1} & 4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}}. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2856]

Exercice 2 ★ Dérivable ou pas dérivable –

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables au point indiqué ?

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ en } 0, \quad g(x) = \begin{cases} (x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } 1, \quad h(x) = |x| \sin x \text{ en } 0.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[320]

Exercice 3 ★★★ C^1 ou pas C^1 ? –

Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[324]

Exercice 4 ★ Avant et après –

Soit f une fonction dérivable en un point x_0 . Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0 ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[326]

Exercice 5 ★★★ Raccordement –

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$ avec f' continue en 0 et en 1. On définit g sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

g est-elle continue ? dérivable ? Si non, quelle(s) hypothèse(s) faut-il ajouter pour que ce soit le cas ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[325]

Exercice 6 ★★ Un problème de tangente –

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[328]

Exercice 7 ★★★ Dérivabilité de $|f|$ –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. Démontrer que $|f|$ est dérivable en x .

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

Démontrer que si $f'(x) = 0$, alors $|f|$ est dérivable en x . Démontrer que si $f'(x) \neq 0$, alors $|f|$ n'est pas dérivable en x .

3. Démontrer que si $f'(x) = 0$, alors $|f|$ est dérivable en x .

4. Démontrer que si $f'(x) \neq 0$, alors $|f|$ n'est pas dérivable en x .

5. Énoncer le théorème démontré.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2768]

Exercice 8 ★★★★★ Dérivabilité dans le même sens et zéro –

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3211]

Exercice 9 ★★★★★ Un calcul de limite –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ et la déterminer.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[329]

2 Théorème de Rolle

Exercice 10 ★ Pas trop de racines! –

Soit $n \geq 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$. On note $P(X) = X^n + pX + q$.

1. Démontrer que P admet au plus 3 racines réelles.

2. On suppose que n est pair. Démontrer que P admet au plus deux racines réelles.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3070]

Exercice 11 ★★ Rolle itéré –

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[323]

Exercice 12 ★★ Racines de polynômes –

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2.

1. On suppose que P est scindé sur \mathbb{R} , à racines simples. Démontrer que P' est aussi scindé sur \mathbb{R} à racines simples.

2. Reprendre la question, mais sans la précision "à racines simples".

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3071]

Exercice 13 ★★★★★ Nombre de solutions d'une équation –

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[335]

Exercice 14 ★★★★★ **Rolle à l'infini –**

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $d \in]0, +\infty[$ tel que $f'(d) = 0$. Le résultat étant trivial si f est identiquement nulle, on suppose que ce n'est pas le cas et qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f(c) > 0$.

1. Démontrer qu'il existe $a \in]0, c[$ et $b \in]c, +\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.
2. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[338]

Exercice 15 ★★★★★ **Rolle et dérivée n -ième –**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n . On suppose qu'il existe $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ tels que $f(x_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

1. Soit $x \in [a, b]$ différent des x_i . Déterminer un réel A pour lequel la fonction $\varphi : t \in [a, b] \mapsto f(t) - A(t - x_1) \dots (t - x_n)$ s'annule en x .
2. En déduire qu'il existe $\lambda \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}.$$

3. En déduire que

$$|f(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \prod_{i=1}^n |x - x_i|.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[339]

Exercice 16 ★★★★★ **Tangente passant par un point donné –**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$, et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d, 0)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[343]

Exercice 17 ★★★★★ **Zéros des dérivées des fonctions C^∞ bornées –**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et bornée.

1. Montrer que si une dérivée $f^{(k)}$ admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes $f^{(p)}$, $1 \leq p < k$ tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. En déduire que, pour $k \geq 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k - 1$ fois.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[351]

3 Théorème et inégalité des accroissements finis

Exercice 18 ★ **Accroissements finis et inégalités –**

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.
2. $\forall x \geq 0, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3066]

Exercice 19 ★ **Erreur commise –**

Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\mathbf{a.} \sqrt{10001} \simeq 100; \mathbf{b.} \frac{1}{0,9992} \simeq 1; \mathbf{c.} \cos 1 \simeq \frac{1}{2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[331]

Exercice 20 ★★ Suite presque harmonique –

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[322]

Exercice 21 ★★ Au dessus d'une droite –

Soit f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq mx$ pour tout $x \in [0, 1]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[332]

Exercice 22 ★★ Corde et tangente –

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$. L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Soit $c \in]0, 1[$ et soit M le point de coordonnées $(c, f(c))$. Rappeler une équation de la tangente à la courbe représentative de f en M ainsi qu'une équation de la corde reliant $(0, f(0))$ à M . Donner une interprétation géométrique du résultat que l'on veut démontrer, et illustrer le sur un dessin.

2. On définit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et par $g(0) = 0$. Vérifier que g est continue sur $[0, 1]$ et \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$.

3. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

4. Démontrer le résultat dans le cas $f(1) = 0$.

5. Dans cette question, on suppose que $f(1) > 0$.

Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$. En déduire que g' s'annule sur $]0, 1[$ et conclure.

6. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.

7. En déduire que g' s'annule sur $]0, 1[$ et conclure.

8. Comment procéder si $f(1) < 0$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3068]

Exercice 23 ★★ Fonction bornée dont la dérivée admet une limite –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f' = l$. Montrer que $l = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[333]

Exercice 24 ★★★ Limite de la dérivée et limite de $f(x)/x$. –

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{f(A)}{x} \right| + \varepsilon.$$

En déduire le résultat dans ce cas.

2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{f(A)}{A} \right| + \varepsilon.$$

3. En déduire le résultat dans ce cas.

4. Démontrer le résultat dans le cas général.

5. Réciproquement, est-il vrai que pour toute fonction dérivable $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$, alors on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3067]

Exercice 25 ★★ Théorème des accroissements finis généralisés et règle de l'Hospital –

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \neq g(b)$.

2. On fixe $t \in [a, b]$, on pose $p = \frac{f(t)-f(b)}{g(t)-g(b)}$ et on considère la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - pg(x)$. Vérifier que $h(b) = h(t)$ et en déduire qu'il existe un nombre réel $c(t) \in]t, b[$ tel que

$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))}.$$

3. On suppose qu'il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \ell.$$

4. Application : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[340]

Exercice 26 ★★★ Somme de n valeurs –

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$ vérifiant $f'(x_1) + \dots + f'(x_n) = n$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[341]

Exercice 27 ★★★★★ Théorème de Darboux –

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , et f une fonction dérivable sur I . On veut prouver que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Pourquoi n'est-ce pas trivial ?

2. Soit $(a, b) \in I^2$, tel que $f'(a) < f'(b)$, et soit $z \in]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $h \in]0, \alpha]$, on ait :

$$\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) < z < \frac{1}{h} (f(b+h) - f(b)).$$

3. En déduire l'existence d'un réel $h > 0$ et d'un point y de I tels que :

$$y+h \in I \text{ et } \frac{1}{h} (f(y+h) - f(y)) = z.$$

4. Montrer qu'il existe un point x de I tel que $z = f'(x)$.

5. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

6. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \in]0, 1]$ et par $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$. f' est-elle continue sur $[0, 1]$? Déterminer $f'([0, 1])$. Qu'en concluez-vous ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[342]

4 Dérivées successives

Exercice 28 ★ Dérivée n -ème –

Pour $n \geq 1$, déterminer la dérivée n -ème des fonctions suivantes :

$$x \mapsto a^x \ (a > 0), \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3212]

Exercice 29 ★ Premiers calculs avec la formule de Leibniz –

Calculer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto x \exp(x) \qquad 2. x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[347]

Exercice 30 ★★★ Un calcul un peu sophistiqué –

Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

1. Calculer la dérivée k -ème de $x \mapsto x^{n-1}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire la dérivée n -ième de la fonction suivante : $x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[345]

Exercice 31 ★★ Polynômes de Laguerre –

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x ,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que, pour tout entier n , L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
2. Plus précisément, montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[346]

Exercice 32 ★★★ Un grand classique ! –

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n(1/x)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R} .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[348]

Exercice 33 ★★★★★ Avec des nombres complexes –

Soit $a + ib$ une racine n -ième de l'unité, et $f(x) = e^{ax} \cos(bx)$. Donner une formule simple pour $f^{(n)}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[352]

5 Applications à l'étude de suite - théorème du point fixe

Exercice 34 ★★ Valeur approchée de $\ln 2$ –

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2), \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Démontrer que $g \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ .
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ . Que vaut $f'(0)$?
3. Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}$ pour tout $x > 0$. En déduire que $|f'(x)| \leq 1/2$ sur \mathbb{R}_+ .
4. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[353]

Exercice 35 ★★ Suite récurrente convergeant vers e –

On note f la fonction définie sur $[1, e]$ par $f(x) = \frac{2x}{\ln(x)+1}$ et g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(y) = \frac{2y}{(1+y)^2}$.

1. Démontrer que, pour tout $y \in [0, 1]$, $0 \leq g(y) \leq \frac{1}{2}$.
2. Étudier f et démontrer que l'intervalle $[1, e]$ est stable par f .
3. Démontrer que, pour tous $x, y \in [1, e]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ (on pourra utiliser le résultat de la première question).
4. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $|u_n - e| \leq \frac{e-1}{2^n}$. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?
5. Déterminer un rang n pour lequel u_n est une approximation de e à 10^{-3} près.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3186]

Exercice 36 ★★★ Une suite récurrente –

On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{x}$.

1. Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*)$, et montrer que I est stable par f .
2. Démontrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

4. Démontrer que (u_n) converge vers γ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[752]

Exercice 37 ★★★★★ Théorème du point fixe –

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $|f'(x)| \leq k$. On dit que $\gamma \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(\gamma) = \gamma$.

1. Démontrer que f admet un point fixe.
2. Démontrer que ce point fixe est unique. On le note γ .
3. Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que (u_n) converge vers γ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[729]

Exercice 38 ★★★★★ Vitesse de convergence des suites récurrentes –

Soit (u_n) une suite de réels convergente vers ℓ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq \ell$. On associe la suite (v_n) définie par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|.$$

On suppose que la suite (v_n) converge vers a .

1. Démontrer que $a \in [0, 1]$. On dit que la vitesse de convergence de la suite (u_n) est lente si $a = 1$; géométrique si $a \in]0, 1[$; rapide si $a = 0$.
2. lente si $a = 1$;
3. géométrique si $a \in]0, 1[$;
4. rapide si $a = 0$.
5. Donner un exemple (simple !) de suite avec convergence lente ; avec convergence géométrique ; avec convergence rapide.
6. On suppose dans cette question que la suite (u_n) est donnée par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que (u_n) converge vers ℓ . Déterminer, suivant la valeur de $f'(\ell)$, la vitesse de convergence de la suite (u_n) .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2584]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Poser une fonction f de sorte que la limite à calculer apparaisse comme la limite d'un taux d'accroissement. Utiliser ensuite la définition du nombre dérivé.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Calculer la limite du taux d'accroissement, ou bien comparer la dérivée à droite et la dérivée à gauche.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Montrer que les deux fonctions sont dérivables en 0 en revenant à la définition (limite du taux d'accroissement). Calculer ensuite $f'(x)$ et $g'(x)$ pour $x \neq 0$, puis étudier si f' et g' sont continues en 0. On pourra notamment calculer $f'(1/2n\pi)$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Couper en passant par $f(x_0)$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Le seul problème est en $1/2$. On séparera l'étude des limites à gauche et à droite pour la fonction et pour le taux d'accroissement en $1/2$. On pourra aussi utiliser le théorème de prolongement d'une dérivée pour déterminer les dérivées à droite et à gauche de g en $1/2$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Écrire l'équation de la tangente à la première courbe au point d'abscisse a , et l'équation de la tangente à la deuxième courbe au point d'abscisse b . Quelle condition faut-il mettre sur a et b pour que les deux tangentes soient identiques ?

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. $|f| = f$ ou $|f| = -f$ dans un intervalle ouvert contenant x .
 2. Utiliser $||a| - |b|| \leq |a - b|$. f change de signe en x . Étudier la dérivée à gauche et à droite en x de $|f|$.
 3. Utiliser $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
 4. f change de signe en x . Étudier la dérivée à gauche et à droite en x de $|f|$.
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

Trouver $a' \in]a, b[$ tel que $f(a') > 0$ et $b' \in]a, b[$ tel que $f(b') < 0$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Se ramener à la définition de la dérivabilité par l'écriture sous la forme d'un développement limité d'ordre 1.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Raisonnement par l'absurde et trouver deux racines distinctes à une dérivée suffisamment grande de P .

Indication pour l'exercice 11 ▲

On pourra procéder par récurrence finie sur l'ordre de dérivation.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. C'est le théorème de Rolle.
-

2. Idem, mais en décomptant proprement les multiplicités.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Introduire $g(x) = P(x) - e^x$. Fabriquer des racines à g' , g'' en fonction des racines de g . Trouver une contradiction si n est trop grand.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. $A = \frac{f(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_n)}$.
 2. Étudier les zéros de φ et de ses dérivées.
 3. Pourquoi $\|f^{(n)}\|_\infty$ existe ?
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

Traduire cela analytiquement. On doit trouver $x_0 \in]a, b[$ vérifiant ... Appliquer ensuite le théorème de Rolle à une bonne fonction pour obtenir ce point.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Montrer par récurrence décroissante sur p que $f^{(p)}$ garde un signe constant au voisinage de $+\infty$, puis conclure en utilisant le lien entre comportement de la fonction et signe de la dérivée, et le fait qu'une fonction bornée ne peut avoir sa dérivée qui admet une limite non-nulle à l'infini.
 2. Utiliser le théorème de Rolle et le théorème de Rolle "à l'infini" pour fabriquer des zéros. Commencer par fabriquer un zéro à f'' , puis itérer.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à \arctan entre x et y .
 2. Appliquer le théorème des accroissements finis à e^x entre 0 et x .
-

Indication pour l'exercice 19 ▲

Utiliser l'inégalité des accroissements finis avec une fonction bien choisie.

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Appliquer l'égalité des accroissements finis.
 2. Appliquer l'inégalité précédente pour $x = n, \dots, 2n - 1$
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

Poser $m = \inf_{x \in [0,1]} f'(x)$ et justifier que $m > 0$.

Indication pour l'exercice 22 ▲

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
5. Comment prouver $d \in]0, 1[$ tel que $g'(d) < 0$.
- 6.

7. Comment par prouver $d \in]0, 1[$ tel que $g'(d) < 0$.

8.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Supposer $l > 0$ et prendre un voisinage de $+\infty$ tel que $f'(x) \geq l/2$. Appliquer ensuite l'inégalité des accroissements finis.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Inégalité des accroissements finis et inégalité triangulaire. Trouver x_0 tel que $|f(A)|/x_0 \leq \varepsilon$.
 2. Inégalité des accroissements finis et inégalité triangulaire.
 3. Trouver x_0 tel que $|f(A)|/x_0 \leq \varepsilon$.
 4. Considérer $g(x) = f(x) - \ell x$.
 5. Non ! Penser à une fonction qui oscille....
-

Indication pour l'exercice 25 ▲

- 1.
 - 2.
 - 3.
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

Appliquer le théorème des accroissements finis entre 0 et $1/n$, puis entre $1/n$ et $2/n$, etc...

Indication pour l'exercice 27 ▲

- 1.
 2. Utiliser la définition du nombre dérivé en a et b .
 3. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
 4. Appliquer le théorème des accroissements finis.
 - 5.
 6. Pour prouver la dérivabilité en 0, on revient à la définition.
-

Indication pour l'exercice 28 ▲

Commencer par calculer les premières dérivées.

Indication pour l'exercice 29 ▲

Appliquer la formule de Leibniz.

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. Procéder par récurrence en écrivant les premières dérivées pour deviner la formule.
 2. Utiliser la formule de Leibniz.
-

Indication pour l'exercice 31 ▲

Il s'agit d'appliquer la formule de Leibniz.

Indication pour l'exercice 32 ▲

1. Procéder par récurrence.

2. Montrer par récurrence sur n que f est de classe C^n . On pourra utiliser que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

pour tout polynôme P .

Indication pour l'exercice 33 ▲

Utiliser la fonction $g(x) = e^{ax} \cos(bx) + ie^{ax} \sin(bx)$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. Calculer la dérivée seconde.
 2. On peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée.
 3. Dresser le tableau de variations de f' .
 4. Appliquer le théorème du point fixe !
-

Indication pour l'exercice 35 ▲

1. Étudier les variations de g .
 - 2.
 3. On remarque que $f'(x) = g(\ln(x))$.
 4. Récurrence.
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 36 ▲

1. Quelle est l'image de la fonction sinus ?
 2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
 3. Calculer la dérivée.
 4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis.
-

Indication pour l'exercice 37 ▲

1. Étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$.
 2. Utiliser le fait que f est k -lipschitzienne.
 3. Même chose !
-

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Si une suite (x_n) de réels strictement positifs vérifie que x_{n+1}/x_n tend vers $a > 1$, alors (x_n) tend vers $+\infty$.
 - 2.
 3. Utiliser que $f(\ell) = \ell$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Posons $f(x) = e^{3x+2}$. Alors on a $f(0) = e^2$ et

$$\frac{e^{3x+2} - e^2}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Par définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x} = f'(0) = 3e^2,$$

puisque $f'(x) = 3 \exp(3x+2)$.

2. Posons $g(x) = \cos x$. On a $g(0) = 1$ et donc

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = g'(0) = 0$$

puisque $g'(x) = -\sin(x)$.

3. Posons $h(x) = \ln(2-x)$, qui est définie et dérivable sur $] -\infty, 2[$ et vérifie $h'(x) = -\frac{1}{2-x}$. On a de plus

$$\frac{\ln(2-x)}{x-1} = \frac{h(x) - h(1)}{x-1}$$

puisque $h(1) = \ln(1) = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1} = h'(1) = -1.$$

4. Posons $k(x) = \exp(\cos x)$. La fonction k est continue et dérivable sur \mathbb{R} , avec $k'(x) = -\sin(x) \exp(\cos x)$ puisque $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\exp'(x) = \exp(x)$. D'autre part, on a

$$\frac{\exp(\cos x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{k(x) - k(\pi/2)}{x - \pi/2}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = k'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) \exp(\cos(\pi/2)) = -1 \times \exp(0) = -1.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

On revient à la définition, et on cherche si le taux d'accroissement admet une limite en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \frac{1}{1+|x|} \rightarrow 1$$

lorsque $x \rightarrow 0$. La fonction est donc dérivable en 0, de dérivée 1. Concernant g , on remarque que g est définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = (x-1)^2$ (la formule fonctionne encore pour $x = 1$). La dérivée de $x \mapsto (x-1)^2$ étant $x \mapsto 2(x-1)$, la fonction g est donc dérivable à droite en 1, et sa dérivée vaut 0. On remarque que g est défini sur $] -\infty, 1]$ par $g(x) = (x-1)$. La dérivée de la fonction $x \mapsto x-1$ étant 1, g est dérivable à gauche en 1 et sa dérivée vaut 1. Les dérivées à droite et à gauche de g en 1 ne coïncident pas, donc g n'est pas dérivable en 1. Pour h , on a

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = |x| \times \frac{\sin x}{x}.$$

Puisque $\sin x/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0 et que $|x|$ tend vers 0 quand x tend vers 0, le taux d'accroissement converge vers 0 quand x tend vers 0, et donc h est dérivable en 0, avec $h'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 3 ▲

On remarque d'abord que f est continue en 0, car, pour $x \neq 0$, on a

$$|f(x) - f(0)| \leq x^2$$

et $x^2 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. D'autre part, f est clairement C^1 sur \mathbb{R}^* . Etudions la dérivabilité en 0 en revenant à la définition, c'est-à-dire en étudiant si le taux d'accroissement admet une limite. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

et ceci tend vers 0 quand x tend vers 0, grâce à la majoration $|x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$. Ainsi, f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Pour déterminer si f est C^1 en 0, il faut étudier si la dérivée est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, posons $u_n = \frac{1}{2n\pi}$. Alors, u_n tend vers 0, et

$$f'(u_n) = \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \neq f'(0).$$

Ainsi, f' n'est pas continue en 0, et f n'est pas de classe C^1 . Concernant g , on peut procéder comme pour f pour démontrer que g est C^1 sur \mathbb{R}^* , dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

de sorte que

$$|g'(x) - g'(0)| \leq 3|x|^2 + |x|.$$

Ceci entraîne que g' est continue en 0, et donc que g est de classe C^1 . On peut aussi prouver directement que g est de classe C^1 en appliquant le théorème de prolongement d'une dérivée, puisque pour $x \neq 0$,

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

et que cette quantité tend vers 0 si x tend vers 0.

Correction de l'exercice 4 ▲

Il suffit de couper en passant par $f(x_0)$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \right) \rightarrow \frac{f'(x_0) + f'(x_0)}{2}.$$

La réciproque est clairement fausse. Il suffit de prendre $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$.

Correction de l'exercice 5 ▲

La fonction g est clairement dérivable sur $]0, 1/2[$ et sur $]1/2, 1[$. Le seul problème est en $1/2$. Mais, on a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} g(x) = f(1) = f(0) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x).$$

La fonction g est donc continue en $1/2$. Pour $x < 1/2$, on a

$$g'(x) = 2f'(2x) \longrightarrow_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 2f'(1)$$

et donc, par le théorème de prolongement d'une dérivée, g admet une dérivée à gauche en $1/2$ égale à $2f'(1)$. De même, pour $x > 1/2$, on a

$$g'(x) = 2f'(2x-1) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 2f'(0)$$

et donc, par le théorème de prolongement d'une dérivée, g admet une dérivée à droite en $1/2$ égale à $2f'(0)$. La fonction g est dérivable en $1/2$ si et seulement si les dérivées à droite et à gauche coïncident, c'est-à-dire si et seulement $f'(1) = f'(0)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Écrivons l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse a : il s'agit de

$$y - a^2 = 2a(x - a) \iff y = 2ax - a^2.$$

De même, écrivons l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 1/x$ au point d'abscisse b : il s'agit de

$$y - \frac{1}{b} = -\frac{1}{b^2}(x - b) \iff y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}.$$

Pour que les deux tangentes coïncident, il faut que a et b vérifient

$$\begin{cases} 2a &= \frac{-1}{b^2} \\ -a^2 &= \frac{2}{b}. \end{cases}$$

On en déduit que $-8a = a^4$, ce qui donne $a = 0$ ou $a = -2$. La solution $a = 0$ est à exclure, car on ne peut pas déterminer de valeur correspondante pour b . Pour $a = -2$, on obtient $b = -1/2$, et on vérifie facilement que les tangentes en a et en b coïncident.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour fixer les idées, supposons que $f(x) > 0$. Alors, puisque f est dérivable, donc continue, il existe $\eta > 0$ tel que $f(y) > 0$ sur l'intervalle $]x - \eta, x + \eta[$. Mais alors, si $|h| < \eta$, le taux d'accroissement de $|f|$ entre x et $x + h$ s'écrit

$$\frac{|f|(x+h) - |f|(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0, ceci tend vers $f'(x)$ et donc $|f|$ est dérivable en x , avec $|f|'(x) = f'(x)$.

2. On va prouver que $|f|$ est dérivable en x avec $|f|'(x) = 0$. Pour cela, on utilise l'inégalité triangulaire $||a| - |b|| \leq |a - b|$ pour obtenir

$$\left| \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} \right| \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $|f|$ est dérivable en x avec $|f|'(x) = 0$. Puisque $f'(x) \neq 0$, x n'est pas un extrémum de f , et f change de signe en x . On va supposer par exemple que $f(t) < 0$ si $t \in [x - \eta, x]$ et $f(t) > 0$ si $t \in [x, x + \eta]$. Alors, pour $0 < h < \eta$, on a

$$\frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \frac{f(x+h) - 0}{h} \rightarrow f'(x)$$

lorsque $h \rightarrow 0$. D'autre part, si $-\eta < h < 0$, alors

$$\frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \frac{-f(x+h) - 0}{h} \rightarrow -f'(x)$$

lorsque $h \rightarrow 0$. Ainsi, $|f|$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x qui ne coïncide pas. Donc $|f|$ n'est pas dérivable en x .

3. On va prouver que $|f|$ est dérivable en x avec $|f|'(x) = 0$. Pour cela, on utilise l'inégalité triangulaire $||a| - |b|| \leq |a - b|$ pour obtenir

$$\left| \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} \right| \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $|f|$ est dérivable en x avec $|f|'(x) = 0$.

4. Puisque $f'(x) \neq 0$, x n'est pas un extrémum de f , et f change de signe en x . On va supposer par exemple que $f(t) < 0$ si $t \in [x - \eta, x]$ et $f(t) > 0$ si $t \in [x, x + \eta]$. Alors, pour $0 < h < \eta$, on a

$$\frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \frac{f(x+h) - 0}{h} \rightarrow f'(x)$$

lorsque $h \rightarrow 0$. D'autre part, si $-\eta < h < 0$, alors

$$\frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \frac{-f(x+h) - 0}{h} \rightarrow -f'(x)$$

lorsque $h \rightarrow 0$. Ainsi, $|f|$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x qui ne coïncide pas. Donc $|f|$ n'est pas dérivable en x .

5. On a prouvé que $|f|$ est dérivable sur \mathbb{R} si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors $f'(x) = 0$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Puisque $f'(a) > 0$, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Ceci implique qu'il existe $a' \in]a, b[$ tel que $f(a') > 0$ (sinon, pour tout $x \geq a$, on aurait $f(x) \leq f(a)$, donc $f(x) - f(a) \leq 0$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0,$$

donc en passant à la limite $f'(a) \leq 0$). De la même façon, en utilisant $f'(b) > 0$, on prouve l'existence de $b' \in]a, b[$ tel que $f(b') < 0$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b pour conclure.

Correction de l'exercice 9 ▲

Fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, on a

$$|f(x) - f'(0)x| \leq \varepsilon \times |x|.$$

Soit n assez grand pour que $\frac{1}{n} < \delta$. On applique alors la formule précédente à $x = \frac{k}{n^2}$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$. On obtient

$$-\varepsilon \frac{k}{n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{k}{n^2} \leq \varepsilon \frac{k}{n^2}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 1 à n et on trouve

$$-\varepsilon \frac{n+1}{2n} \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \frac{n+1}{2n} \leq \varepsilon \frac{n+1}{2n}.$$

Écrivant $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ et en remarquant que $(n+1)/2n \leq 1$, on trouve

$$-\varepsilon + \frac{f'(0)}{2n} \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \leq \varepsilon + \frac{f'(0)}{2n}.$$

Pour n assez grand, on en déduit que

$$-2\varepsilon \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \leq 2\varepsilon.$$

On en conclut que la suite converge avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Supposons que P admette 4 racines réelles distinctes. Alors, par le théorème de Rolle, P' admet au moins 3 racines réelles distinctes, et P'' au moins deux racines réelles distinctes. Mais $P''(X) = n(n-1)X^{n-2}$ admet au plus une racine, et on a une contradiction.

2. Supposons que P admette au moins 3 racines réelles distinctes. Alors, par le théorème de Rolle, P' admet au moins 2 racines réelles distinctes. Mais $P'(X) = nX^{n-1} + p$ définit une fonction polynômiale strictement croissante, car $n-1$ est impair, et donc P' admet au plus une racine, ce qui est une contradiction.

Correction de l'exercice 11 ▲

On va procéder pour les deux questions par récurrence, le principal problème étant de trouver la bonne hypothèse de récurrence.

1. Posons, pour $0 \leq k \leq n$, l'hypothèse \mathcal{P}_k : " $f^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points distincts de $[a, b]$, et même de $]a, b[$ si $k \geq 1$ ".

La propriété est vraie au rang $k=0$, par hypothèse. Supposons la propriété vraie au rang $k < n$ et prouvons la au rang $k+1$. Soient $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1-k} \leq b$ des réels tous distincts de sorte que $f^{(k)}(a_i) = 0$ pour tout i . Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $g = f^{(k)}$ sur les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, avec $1 \leq i \leq n-k$. On obtient des réels b_i , avec $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f^{(k+1)}(b_i) = g'(b_i) = 0$. De plus, ces réels sont distincts car

$$b_i < a_{i+1} < b_{i+1}$$

et ils sont tous dans l'intervalle $]a, b[$ puisque $a \leq a_1 < b_1$ et $b_{n-k} < a_{n+1-k} \leq b$. \mathcal{P}_{k+1} est donc vraie.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie, et c'est exactement ce que l'on voulait démontrer.

2. La propriété est vraie au rang $k=0$, par hypothèse.

3. Supposons la propriété vraie au rang $k < n$ et prouvons la au rang $k+1$. Soient $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1-k} \leq b$ des réels tous distincts de sorte que $f^{(k)}(a_i) = 0$ pour tout i . Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $g = f^{(k)}$ sur les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, avec $1 \leq i \leq n-k$. On obtient des réels b_i , avec $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f^{(k+1)}(b_i) = g'(b_i) = 0$. De plus, ces réels sont distincts car

$$b_i < a_{i+1} < b_{i+1}$$

et ils sont tous dans l'intervalle $]a, b[$ puisque $a \leq a_1 < b_1$ et $b_{n-k} < a_{n+1-k} \leq b$. \mathcal{P}_{k+1} est donc vraie.

4. On introduit cette fois, pour $0 \leq k \leq n$, l'hypothèse de récurrence \mathcal{P}_k : " $f^{(k)}$ s'annule en b_k avec $a < b_k$ et $b_k < b$ si $k \geq 1$ ". \mathcal{P}_0 est clairement vérifiée, et si \mathcal{P}_k est vérifiée pour $0 \leq k < n$, alors posons $g = f^{(k)}$. On sait que $g(a) = 0$ et que $g(b_k) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $b_{k+1} \in]a, b_k[\subset]a, b[$ de sorte que

$$f^{(k+1)}(b_{k+1}) = g'(b_k) = 0.$$

\mathcal{P}_{k+1} est donc vérifiée. Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vérifiée, et c'est exactement ce que l'on voulait prouver !

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les racines de P . Alors, par le théorème de Rolle, dans chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour i de 1 à $n-1$, P' admet une racine y_i . P' admet donc $n-1$ racines réelles, $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$.

2. On note $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ les racines distinctes de P , x_i étant de multiplicité m_i . L'hypothèse nous dit que $m_1 + \dots + m_p = n$. Comme dans la question précédente, on trouve $p-1$ racines de P' , $y_1 < \dots < y_{p-1}$, qui sont aussi distinctes des x_i . Comme chaque x_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$, on a trouvé des racines de P' de multiplicité totale

$$p-1 + \sum_{j=1}^p (m_j - 1) = p-1 + n - p = n-1.$$

On a donc bien prouvé que P' est scindé sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 13 ▲

On pose $g(x) = e^x - P(x)$. Si l'équation admet n solutions, c'est que g admet n racines. Par des applications successives du théorème de Rolle, on trouve que g' admet $n - 1$ racines, g'' en admet $n - 2, \dots$, jusque $g^{(n-1)}$ qui en admet au moins 1. Supposons maintenant que $n - 1 > \deg(P)$. Alors,

$$g^{(n-1)} = e^x - P^{(n-1)} = e^x$$

et on trouve que l'équation $e^x = 0$ admet au moins une solution. C'est bien entendu absurde, et on vient de prouver que l'équation $P(x) = e^x$ admet donc au plus $n + 1$ solutions, avec $n = \deg(P)$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Pour $\varepsilon = f(c)/2$, il existe $A \geq c$ tel que, pour $x \geq A$, $|f(x)| < \varepsilon$. Ainsi, on a $f(A) < \frac{f(c)}{2} < f(c)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve $b \in]c, A[$ tel que $f(b) = f(c)/2$. De même, $\frac{f(c)}{2} \in]0, f(c)[$. On peut donc trouver $a \in]0, c[$ avec $f(a) = f(c)/2$. On a donc $a < b$, $f(a) = f(b)$. On applique alors le théorème de Rolle entre a et b pour trouver $d \in]a, b[$ tel que $f'(d) = 0$. Il existe d'autres méthodes pour prouver ce résultat. Par exemple, on définit g sur $[0, \pi/2[$ par $g(t) = f(\tan(t))$. Alors g est continue sur $[0, \pi/2[$, dérivable sur $]0, \pi/2[$. De plus, par théorème de composition des limites $\lim_{\pi/2} g = \lim_{+\infty} f$ existe. On peut donc prolonger g par continuité en $\pi/2$ et on a alors $g(\pi/2) = g(0) = f(0) = \lim_{+\infty} f$. On applique alors le théorème de Rolle à g pour trouver $c \in]0, \pi/2[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(x) = (1 + \tan^2(x))f'(\tan(x)).$$

Donc, $g'(c) = 0 \implies f'(\tan(c)) = 0$.

Correction de l'exercice 15 ▲

- Le seul choix possible est $A = \frac{f(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_n)}$.
- La fonction φ s'annule en x_i , et s'annule aussi en x d'après le choix de A . Ainsi, φ s'annule ainsi $n + 1$ fois dans l'intervalle $[a, b]$. En appliquant le théorème de Rolle successivement à φ' (qui possède donc n zéros dans $]a, b[$), à φ'' (qui en possède $n - 1$), etc..., on trouve qu'il existe $\lambda \in]a, b[$ tel que $\varphi^{(n)}(\lambda) = 0$. Mais $\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!A$. Ainsi, $A = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}$.
- Remarquons d'abord que $f^{(n)}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ puisque f est de classe \mathcal{C}^n . Ainsi, elle est bornée et atteint ses bornes. Le résultat vient donc de la question précédente, et des inégalités $|f^{(n)}(\lambda)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty$ et

$$\left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right| = \prod_{i=1}^n |x - x_i|.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette tangente passe par le point $(d, 0)$ si et seulement si

$$f'(x_0)(x_0 - d) - f(x_0) = 0.$$

On va chercher une fonction dont la dérivée va être presque de la forme précédente, et on va montrer par le théorème de Rolle que la dérivée de cette fonction s'annule. Pour cela, on pose

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - d}$$

définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - d) - f(x)}{(x - d)^2}.$$

De plus, $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, on peut trouver $x_0 \in]a, b[$ tel que $g'(x_0) = 0$. Pour ce x_0 , la relation

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - d}$$

est donc vérifiée, et la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ passe par $(d, 0)$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On va montrer par récurrence décroissante sur p que $f^{(p)}$ garde un signe constant au voisinage de $+\infty$. C'est clairement vrai pour $p = k$ puisque $f^{(k)}$ admet simplement un nombre fini de zéros. Supposons le résultat vrai pour $f^{(p)}$, $p \geq 2$, et prouvons-le pour $f^{(p-1)}$. Du fait que $(f^{(p-1)})'$ garde un signe constant au voisinage de $+\infty$, la fonction $f^{(p-1)}$ est monotone dans ce même voisinage du type $[A, +\infty[$. Elle n'y admet au maximum qu'un seul zéro, et donc elle va elle-même garder un signe constant dans un voisinage éventuellement plus petit de $+\infty$. En particulier, f' est monotone au voisinage de $+\infty$. Elle admet donc une limite en $+\infty$, éventuellement égale à $\pm\infty$. Mais pour que f soit bornée, il est impératif que cette limite soit nulle. Donc f' tend vers 0 en $+\infty$. Répétant le même travail à partir de f'' (on sait désormais que f' est bornée au voisinage de $+\infty$), on trouve que f'' tend vers 0 en $+\infty$. Par récurrence, il vient que $f^{(p)}$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout p de $1, \dots, k$. Bien sûr, l'étude au voisinage de $-\infty$ est complètement similaire.

2. On sait que f' tend vers 0 en $\pm\infty$. Utilisant le théorème de Rolle à l'infini, on sait qu'il existe c tel que $f''(c) = 0$. Mais comme f'' admet aussi comme limite 0 en $\pm\infty$, deux nouvelles applications du théorème de Rolle montrent qu'on trouve deux points d et e avec $f^{(3)}(d) = f^{(3)}(e) = 0$. On peut itérer le raisonnement, en utilisant à la fois le théorème de Rolle classique et le théorème de Rolle à l'infini, et on trouve que $f^{(k)}$ admet bien $k - 1$ zéros au moins.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. On rappelle que la fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq 1.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction arctan entre x et y donne alors le résultat.

2. Si $x = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée. Si $x > 0$, on applique cette fois le théorème (et non l'inégalité !) des accroissements finis à e^x entre 0 et x . Il existe donc $c \in]0, x[$ tel que

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^c(x - 0) = e^c x.$$

Puisque $1 \leq e^c \leq e^x$ et $x \geq 0$, on en déduit l'inégalité demandée.

Correction de l'exercice 19 ▲

On va utiliser l'inégalité des accroissements finis avec une fonction bien choisie :

Posons $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[10000, 10001]$. Alors

$$0 \leq f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{200},$$

et donc

$$\sqrt{10001} - 100 \leq \frac{1}{200}.$$

Posons $g(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[0, 999; 1]$. Alors, sur cet intervalle,

$$g'(x) = \frac{-2}{x^3} \text{ soit } |g'(x)| \leq \frac{2}{0,999^3} \leq 3.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{1}{0,999^2} - 1 \right| \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Posons $h(x) = \cos(x)$, de dérivée $-\sin x$, $|h'(x)| \leq 1$. On a donc

$$\left| \cos 1 - \frac{1}{2} \right| \leq \left| 1 - \frac{\pi}{3} \right| \leq 5 \cdot 10^{-2}.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On va appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln t$ sur l'intervalle $[x, x+1]$. Il existe donc $\theta \in]x, x+1[$ tel que

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{x+1-x}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

On conclut car

$$0 < x < \theta < x+1 \implies \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{x}.$$

2. On applique l'inégalité précédente pour $x = n$, $x = n+1$, $x = n+2$ jusque $x = 2n-1$. On somme ces inégalités : dans le terme du milieu, il y a beaucoup de simplifications et on obtient, en ne gardant que l'inégalité de gauche :

$$v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

On applique ensuite l'inégalité précédente pour $x = n+1$, $x = n+2$ jusque $x = 2n$ et on ne garde cette fois que l'inégalité de droite. Là encore, il se produit des simplifications et on obtient

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n.$$

Ceci se réécrit encore en

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < v_n < \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que (v_n) converge vers $\ln 2$.

Correction de l'exercice 21 ▲

f' est continue sur $[0, 1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Soit $m = \inf_{x \in [0, 1]} f'(x)$. Il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $m = f'(x_0)$. En particulier $m > 0$ puisque $f'(x_0) > 0$. Considérons ensuite $x \in]0, 1]$. Par le théorème des accroissements finis appliqués entre 0 et x , il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c)x.$$

Puisque $f'(c) \geq m$, ceci entraîne bien que $f(x) \geq mx$.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. La tangente à la courbe en M a pour équation

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

La corde reliant $(0, f(0))$ à $M = (c, f(c))$ a pour équation

$$y - f(c) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}(x - c) = \frac{f(c)}{c}(x - c).$$

On souhaite donc démontrer que si la fonction f s'annule en 0, et si la courbe représentative de f admet des tangentes horizontales en $(0, f(0))$ et en $(1, f(1))$, il existe un point M de la courbe où la tangente à la courbe en M et la corde reliant l'origine du repère à M sont confondues.

2. g est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$ comme quotient de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f'(0) = 0 = g(0)$ ce qui prouve la continuité de g en 0.

3. Un calcul facile donne, pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

4. Le réel $c = 1$ convient.

5. On a $g(0) = 0$, $g(1) = f(1) > 0$ et $g'(1) = f'(1) - f(1) < 0$. Puisque $g(1) > g(0)$, le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe $d \in]0, 1[$ tel que $g'(d) = g(1) - g(0) > 0$. On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

6. On a $g(0) = 0$, $g(1) = f(1) > 0$ et $g'(1) = f'(1) - f(1) < 0$.

7. Puisque $g(1) > g(0)$, le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe $d \in]0, 1[$ tel que $g'(d) = g(1) - g(0) > 0$. On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

8. Le raisonnement est similaire, mais cette fois $g'(1) > 0$ et on trouve d dans $]0, 1[$ tel que $g'(d) < 0$.

Correction de l'exercice 23 ▲

Supposons que $l \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer $l > 0$. Il existe alors un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a

$$f'(x) \geq l/2$$

(on applique la définition de la limite avec $\varepsilon = l/2$). Mais alors, pour tout $x \geq A$, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$f(x) - f(A) = f'(c)(x - A) \geq \frac{l(x - A)}{2}$$

où $c \in [A, x]$. Faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve que f tend vers $+\infty$ également ce qui est une contradiction.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Soit $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $|f'(t)| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq A$, l'inégalité des accroissements appliquée à la fonction f entre A et x donne

$$|f(x) - f(A)| \leq \varepsilon|x - A|.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a même

$$|f(x)| - |f(A)| \leq \varepsilon|x - A|.$$

Si on divise par $x > 0$, on trouve

$$\frac{|f(x)|}{x} \leq \frac{|f(A)|}{x} + \varepsilon \frac{x - A}{x}.$$

On conclut à l'inégalité demandée car $x - A \leq x$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq x_0$,

$$\frac{|f(A)|}{x} \leq \varepsilon.$$

Alors on a prouvé que pour tout $x \geq x_0$,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

2. Soit $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $|f'(t)| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq A$, l'inégalité des accroissements appliquée à la fonction f entre A et x donne

$$|f(x) - f(A)| \leq \varepsilon|x - A|.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a même

$$|f(x)| - |f(A)| \leq \varepsilon|x - A|.$$

Si on divise par $x > 0$, on trouve

$$\frac{|f(x)|}{x} \leq \frac{|f(A)|}{x} + \varepsilon \frac{x-A}{x}.$$

On conclut à l'inégalité demandée car $x - A \leq x$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq x_0$,

$$\frac{|f(A)|}{x} \leq \varepsilon.$$

Alors on a prouvé que pour tout $x \geq x_0$,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

4. Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - \ell x$. Alors $g'(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et donc $g(x)/x$ aussi d'après la question précédente. Ceci entraîne facilement que $f(x)/x$ tend vers ℓ .

5. Non ! Considérons par exemple $f(x) = \sin(x)$. Alors $f(x)/x$ tend vers 0, et pourtant $f'(x) = \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. S'il existait $x \in [a, b[$ tel que $g(x) = g(b)$, d'après le théorème de Rolle, il existerait $c \in]x, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui n'est pas le cas d'après les hypothèses.

2. On a

$$\begin{aligned} h(b) - h(t) &= f(b) - pg(b) - f(t) + pg(t) \\ &= \frac{g(t)f(b) - g(b)f(b) - f(t)g(b) + f(b)g(b) - g(t)f(t) + g(b)f(t) + f(t)g(t) - f(b)g(t)}{g(t) - g(a)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction h étant continue sur $[t, b]$ et dérivable sur $]t, b[$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle et il existe $c(t) \in]t, b[$ tel que $h'(c(t)) = 0$. Ceci s'écrit encore $f'(c(t)) - pg'(c(t)) = 0$, ce qui est le résultat demandé.

3. Si $t \rightarrow b^-$, par le théorème des gendarmes, $c(t) \rightarrow b$. Par composition des limites, on a donc

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{f'(c(t))}{g'(c(t))} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

4. En posant $f(x) = \cos x - e^x$ et $g(x) = (x+1)e^x$, nous sommes exactement dans les conditions d'application du résultat précédent avec $a = -1$ et $b = 0$. Puisque $f'(x) = -\sin(x) - e^x$ et $g'(x) = (x+2)e^x$ (remarquons que g' ne s'annule pas sur $[-1, 0]$), il vient $\frac{f'(0)}{g'(0)} = -\frac{1}{2}$ qui est la limite recherchée. En pratique, on lève très rarement une indéterminée de cette façon. On cherche plutôt à utiliser des développements limités.

Correction de l'exercice 26 ▲

Le résultat est clair pour $n = 1$. C'est juste l'application du théorème des accroissements finis entre 0 et 1. Le résultat pour n est à peine plus compliqué si on a la bonne idée. Appliquons le théorème des accroissements finis à f entre $(i-1)/n$ et i/n , pour $i = 1, \dots, n$. On obtient un point $x_i \in](i-1)/n, i/n[$ tel que $f'(x_i) = \frac{f(i/n) - f((i-1)/n)}{1/n}$. Lorsqu'on calcule la somme $f'(x_1) + \dots + f'(x_n)$, les termes se télescopent deux à deux et on trouve finalement

$$f'(x_1) + \dots + f'(x_n) = \frac{f(1) - f(0)}{1/n} = n.$$

Correction de l'exercice 27 ▲

1. f' n'est pas toujours continue.

2. Soit $\varepsilon = \min(z - f'(a), f'(b) - z)$. On suppose sans perte de généralité que $a < b$. Par définition de la limite et de la dérivabilité à droite en a , il existe $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \alpha_1]$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq f'(a) + \varepsilon \leq z.$$

De même, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \alpha_2]$,

$$\frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geq f'(b) - \varepsilon \geq z.$$

Il suffit de prendre $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$.

3. On fixe h dans $]0, \alpha]$. Soit ϕ la fonction :

$$\phi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Cette fonction est continue, et $z \in]\phi(a), \phi(b)[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in I$ tel que $\phi(y) = z$.

4. Par le théorème des accroissements finis, il existe x dans $[y, y+h]$ tel que $f'(x) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z$.

5. On vient de démontrer que si on prend deux éléments quelconques $f'(a)$ et $f'(b)$ de $f'(I)$ avec $f'(a) < f'(b)$, et si on prend $z \in]f'(a), f'(b)[$, alors $z \in f'(I)$: c'est bien que $f'(I)$ est un intervalle.

6. Il est évident que f est dérivable sur $]0, 1]$. Pour prouver la dérivabilité en 0, on revient à la définition :

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \leq h |\sin(1/h^2)| \leq h.$$

f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Remarquons que si $x > 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Posant $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, on a $u_n \rightarrow 0$ alors que $f'(u_n) \rightarrow -\infty$: f' n'est pas continue en 0. Enfin, on a $f'([0, 1]) =$, ce qui donne une autre preuve que f' n'est pas continue puisque l'image d'un segment n'est pas forcément un segment !

Correction de l'exercice 28 ▲

Posons $f(x) = a^x = \exp(x \ln(a))$ qui est bien de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . On remarque que $f'(x) = (\ln a)a^x = (\ln a)f(x)$. On établit alors très facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x.$$

Posons ensuite $g(x) = \frac{1}{x}$ et calculons ses premières dérivées afin de faire apparaître une formule :

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad g''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad g^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4}.$$

Ceci motive à poser, pour $n \geq 1$,

$$\mathcal{P}_n : " \forall x \neq 0, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} ".$$

Démontrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après le calcul fait précédemment. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc, pour tout $x \neq 0$,

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

On dérive et on trouve

$$g^{(n+1)}(x) = -\frac{(-1)^n n! (n+1) x^n}{x^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \geq 1$ et tout $x \neq 0$,

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Correction de l'exercice 29 ▲

1. Posons $u(x) = xe^x$ et écrivons $u(x) = v(x)w(x)$ avec $v(x) = x$ et $w(x) = e^x$. On va appliquer la formule de Leibniz

$$u^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v^{(k)}(x) w^{(n-k)}(x).$$

Cette somme ne va comporter que deux termes. En effet, on a

$$v(x) = x, v'(x) = 1, v^{(k)}(x) = 0, k \geq 2.$$

Comme de plus $w^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \geq 0$, on a donc

$$u^{(n)}(x) = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

Remarquons que cette formule se démontre aussi très facilement par récurrence.

2. Posons $f(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$. On va appliquer la formule de Leibniz en écrivant $f(x) = g(x)h(x)$ avec $h(x) = x^3 + 2x - 7$ et $g(x) = e^x$. La situation est assez facile ici car $h'(x) = 3x^2 + 2$, $h''(x) = 6x$, $h^{(3)}(x) = 6$ et $h^{(k)}(x) = 0$ dès que $k \geq 4$. D'autre part, les dérivées successives de la fonction exponentielle sont encore égales à la fonction exponentielle. On en déduit que

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} h^{(k)}(x) e^x \\ &= \left((x^3 + 2x - 7) + n(3x^2 + 2) + \frac{n(n-1)}{2} 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 6 \right) e^x \\ &= (x^3 + 3nx^2 + (3n^2 - 3n + 2)x + (n^3 - 3n^2 + 4n - 7)) e^x. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 30 ▲

1. Posons $g(x) = x^{n-1}$ et $h(x) = \ln(1+x)$, qui sont C^∞ sur respectivement \mathbb{R} et $] -1, +\infty[$. On établit alors par récurrence que

$$g^{(k)}(x) = (n-1) \dots (n-k) x^{n-1-k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k},$$

puis que

$$h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$$

pour $k > 0$.

2. Posons $f(x) = x^{n-1} \ln(1+x)$ et écrivons $f(x) = g(x)h(x)$. Utilisant la formule de Leibniz, et $g^{(n)} = 0$, on trouve

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^k}.$$

Si $x = 0$, on trouve que $f^{(n)}(0) = n!$. Si $x \neq 0$, on factorise par x pour faire apparaître une somme qu'on va simplifier à l'aide de la formule du binôme :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{-x}{1+x} \right)^k \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \left(1 + \frac{-x}{1+x} \right)^n \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{x} \left(1 - \frac{1}{(1+x)^n} \right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31 ▲

1. D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (e^{-x})^{(j)} (x^n)^{(n-j)}.$$

Or,

$$(e^{-x})^{(j)} = (-1)^j e^{-x},$$

et

$$(x^n)^{(n-j)} = n(n-1) \dots (j+1)x^j.$$

On a donc

$$h_n^{(n)}(x) = e^{-x} P_n(x)$$

où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant valant $(-1)^n \binom{n}{n} = (-1)^n$. L_n est donc bien une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant valant $(-1)^n/n!$.

2. Il s'agit (encore une fois !) de la formule de Leibniz à appliquer correctement ! En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (e^{-x})^{(j)} (x^n)^{(k-j)}.$$

Or,

$$(e^{-x})^{(j)} = (-1)^j e^{-x},$$

et

$$(x^n)^{(k-j)} = n(n-1) \dots (n-k+j+1)x^{n-k+j} = x^{n-k} R_{n,j,k}(x)$$

où $R_{n,j,k}$ est un polynôme (et même un monôme...). En sommant tout cela, on trouve

$$h_n^{(k)}(x) = e^{-x} x^{n-k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j R_{n,j,k}(x)$$

ce qui est le résultat voulu en posant

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j R_{n,j,k}(x).$$

Correction de l'exercice 32 ▲

1. La fonction exponentielle est C^∞ sur \mathbb{R} et $x \mapsto 1/x$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$. On en déduit par le théorème de composition que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$. Prouvons la formule demandée par récurrence sur n . Elle est trivialement vérifiée si $n = 0$. Supposons la vraie au rang n et prouvons-la au rang $n + 1$. Par le théorème de dérivation d'une fonction composée :

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} P_n \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x} \right) \right) = e^{-\frac{1}{x}} P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right)$$

où $P_{n+1}(X) = X^2 P_n(X) - X^2 P_n'(X)$.

2. La première chose à remarquer est que, par comparaison des polynômes et de l'exponentielle au voisinage de $-\infty$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} P \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

pour tout polynôme P . On démontre alors par récurrence sur n que f est C^n sur \mathbb{R} tout entier. C'est clair pour $n = 0$, en appliquant la propriété précédente avec $P = 1$. Supposons que f soit de classe C^n , avec $f^{(n)}(0) = 0$. Pour montrer que f est C^{n+1} il suffit de vérifier que $f^{(n)}$ est dérivable en 0. Mais, pour $x > 0$, on a

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$$

si $x \rightarrow 0^+$ par la propriété précédente pour $P = XP_n$. Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Une preuve alternative consiste à utiliser le théorème de prolongement d'une dérivée. En effet, puisque $f^{(n+1)x}$ admet comme limite 0 quand $x \rightarrow 0$, ce théorème nous dit que $f^{(n)}$ est dérivable en 0, que $f^{(n+1)}$ est continue en 0 avec $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Correction de l'exercice 33 ▲

Une première solution consiste à utiliser la formule de Leibniz et à couper la somme en 4, suivant le nombre de fois où on dérive le cosinus. Il est toutefois plus aisé d'utiliser :

$$g(x) = e^{ax} \cos(bx) + ie^{ax} \sin(bx) = e^{(a+ib)x}.$$

On a alors :

$$g^{(n)}(x) = (a+ib)^n e^{(a+ib)x} = e^{(a+ib)x}$$

puisque $a+ib$ est une racine n -ième de l'unité. Il suffit alors de remarquer que f est la partie réelle de g pour conclure que :

$$f^{(n)}(x) = f(x) = e^{ax} \cos(bx).$$

Correction de l'exercice 34 ▲

1. On va étudier g . Pour cela, il faut aller jusqu'à la dérivée seconde ! En effet, g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ , avec $g'(x) = (x-1)e^x + 1$ et $g''(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}_+$. g'' est positive sur \mathbb{R}_+ , donc g' est croissante sur cet intervalle. De plus, $g'(0) = 0$ donc g' est positive sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, g est croissante sur \mathbb{R}_+ et comme $g(0) = 0$, g est positive sur \mathbb{R}_+ .

2. On va appliquer le théorème suivant : si f est de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$, et si f' admet une limite l en x_0 , alors f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur I et $f'(x_0) = l$. Ici, f est déjà définie en x_0 , et on doit vérifier qu'elle est continue. Mais il est clair que

$$\frac{x}{e^x - 1} = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{-1} \rightarrow (\exp)'(0) = 1$$

et donc f est continue en 0. De plus, f est clairement C^1 sur $]0, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Effectuons un développement limité de f' autour de 0 :

$$f'(x) = \frac{1 + x + x^2/2 + o(x^2) - 1 - x(1 + x + o(x))}{(x + o(x))^2} = \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \rightarrow \frac{-1}{2}.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1/2$, ce qui prouve que f est C^1 sur \mathbb{R}_+ et que $f'(0) = -1/2$.

3. Le calcul est aisé, et on en déduit que $f'' \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, et donc que f' est croissante sur cet intervalle. D'autre part, $f'(0) = -1/2$ et

$$f'(x) \sim_{+\infty} \frac{-xe^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$$

ce qui prouve que $\lim_{+\infty} f'(x) = 0$. Ainsi, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

ce qui prouve que $|f'| \leq 1/2$ sur \mathbb{R}_+ .

4. Par l'inégalité des accroissements finis, on sait que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$. On peut alors démontrer l'inégalité par récurrence sur n , le point clé étant de remarquer que $f(\ln 2) = \ln 2$. On peut également conclure en appliquant le théorème du point fixe ! En effet, $f(\ln 2) = \ln 2$ et donc $\ln 2$ est l'unique point fixe de f sur \mathbb{R}_+ .

Correction de l'exercice 35 ▲

1. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée vérifie, pour tout $y \in [0, 1]$, $g'(y) = \frac{2(1-y^2)}{(1+y)^4} \geq 0$. Ainsi, la fonction g est croissante sur $[0, 1]$. On en déduit que, pour tout $y \in [0, 1]$,

$$g(0) \leq g(y) \leq g(1) \implies 0 \leq g(y) \leq \frac{1}{2}.$$

2. De même, f est dérivable sur $[1, e]$ et vérifie, pour tout $x \in [1, e]$,

$$f'(x) = \frac{2\ln(x)}{(1+\ln(x))^2} \geq 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $[1, e]$ et donc on a $f([1, e]) = [f(1), f(e)]$ avec $f(1) = 2 \in [1, e]$ et $f(e) = \frac{2e}{2} = e$. Ainsi, $[1, e]$ est stable par f .

3. On remarque que $f'(x) = g(\ln(x))$ et que si $x \in [1, e]$, alors $\ln(x) \in [0, 1]$. On en déduit que $|f'(x)| \leq 1/2$ pour tout $x \in [1, e]$. Le résultat demandé se déduit alors immédiatement de l'inégalité des accroissements finis.

4. Par une récurrence facile, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - e| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - e| = \frac{e-1}{2^n}.$$

On déduit alors du théorème des gendarmes que (u_n) converge vers e .

5. Il s'agit de trouver un entier n tel que

$$\frac{e-1}{2^n} \leq 10^{-3}.$$

Ceci est équivalent à

$$2^n \geq 10^3(e-1)$$

puis, par croissance de la fonction \ln et positivité de $\ln(2)$, à

$$n \geq \frac{\ln(10^3(e-1))}{\ln(2)}.$$

Le membre de droite vaut approximativement 10,74. Il suffit donc de choisir $n = 11$.

Correction de l'exercice 36 ▲

1. L'image de \mathbb{R} par $\sin(1/x)$ étant égale à $[-1, 1]$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^*) = [3/4, 5/4] = I$. I est stable par f car $f(I) \subset f(\mathbb{R}^*) = I$.

2. On a $f(3/4) \geq 3/4$ et $f(5/4) \leq 5/4$ puisque I est stable par f . Posons alors $g(x) = f(x) - x$. g est continue, $g(3/4) \geq 0$ et $g(5/4) \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in I$ tel que $g(\gamma) = 0$, ou encore $f(\gamma) = \gamma$.

3. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = -\frac{1}{4x^2} \cos \frac{1}{x},$$

formule valable sur I . Or, pour tout $x \in I$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{16}{4 \times 9} = \frac{4}{9} < 1.$$

4. Notons $k = 4/9$. On démontre par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - \gamma| \leq k^{n-1} |u_1 - \gamma|.$$

C'est vrai si $n = 1$. Supposons que c'est vrai au rang $n \geq 1$ et prouvons-le au rang $n + 1$. On remarque que, puisque $u_1 \in I$ et que I est stable par f , alors $u_n \in I$. Il suffit alors d'écrire

$$|u_{n+1} - \gamma| = |f(u_n) - f(\gamma)| \leq k |u_n - \gamma| \leq k^n |u_1 - \gamma|$$

pour le prouver au rang $(n + 1)$. On déduit alors du théorème des gendarmes que $(u_n - \gamma)$ tend vers 0, c'est-à-dire que (u_n) tend vers γ .

Correction de l'exercice 37 ▲

1. Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$. Alors g est continue sur $[a, b]$, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in [a, b]$ tel que $g(\gamma) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(\gamma) = \gamma$.

2. Supposons qu'il existe deux points fixes différents γ_1 et γ_2 . Alors

$$|\gamma_1 - \gamma_2| = |f(\gamma_1) - f(\gamma_2)| \leq k |\gamma_1 - \gamma_2| < |\gamma_1 - \gamma_2|.$$

Ceci est impossible et donc f admet un unique point fixe γ .

3. On démontre par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|u_n - \gamma| \leq k^n |u_0 - \gamma|.$$

C'est vrai si $n = 0$ et si c'est vrai à un certain rang n , alors il suffit d'écrire

$$|u_{n+1} - \gamma| = |f(u_n) - \gamma| \leq k |u_n - \gamma| \leq k^{n+1} |u_0 - \gamma|$$

pour le prouver au rang $(n + 1)$. On déduit alors du théorème des gendarmes que $(u_n - \gamma)$ tend vers 0, c'est-à-dire que (u_n) tend vers γ .

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Rappelons le fait suivant : si (x_n) est une suite de réels strictement positifs telle que x_{n+1}/x_n converge vers $a > 1$, alors (x_n) tend vers $+\infty$. Appliquons ce résultat à la suite (x_n) définie par $x_n = |u_n - \ell|$ pour $n \geq 0$. Avec cette définition, on a aussi que $v_n = x_{n+1}/x_n$ pour tout $n \geq 0$. Puisque (x_n) tend vers 0, on ne peut pas avoir $a > 1$, et il est clair que $a \in [0, 1]$.

2. Les exemples $u_n = 1/(n+1)$, $u_n = 1/2^n$ et $u_n = \frac{1}{n!}$ donnent des exemples simples de convergence qui sont respectivement lente, géométrique et rapide.

3. Rappelons que, puisque f est continue en ℓ , on a $f(\ell) = \ell$. On en déduit que

$$v_n = \left| \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} \right|.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction f entre u_n et ℓ . Puisque (u_n) converge vers ℓ et que f est dérivable en ℓ , ce taux d'accroissement converge vers $f'(\ell)$ et donc (v_n) converge vers $|f'(\ell)|$. Ainsi, on a prouvé que la convergence est lente si $|f'(\ell)| = 1$, géométrique si $|f'(\ell)| \in]0, 1[$ et rapide si $f'(\ell) = 0$.
