

## 1 Opérations sur les polynômes - Formule de Taylor

### Exercice 1 ★ Carrés –

Soient  $a, b$  des réels, et  $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  le polynôme  $P$  est-il le carré d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[617]

### Exercice 2 ★★ Quelques équations –

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  :

1.  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2.  $P'^2 = 4P$
3.  $P \circ P = P$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[618]

### Exercice 3 ★★★★★ Le polynôme dérivé divise le polynôme –

Déterminer les polynômes  $P$  de degré supérieur ou égal à 1 et tels que  $P' | P$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[619]

## 2 Division euclidienne

### Exercice 4 ★ En pratique ! –

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1.  $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$  par  $X^2 + 3X - 1$  ;
2.  $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$  par  $X^2 - X - 7$  ;
3.  $X^5 - X^2 + 2$  par  $X^2 + 1$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[620]

### Exercice 5 ★★ Expression du reste –

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ , soit  $a, b \in \mathbb{K}$  avec  $a \neq b$ .

1. Soit  $R$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ . Exprimer  $R$  en fonction de  $P(a)$  et de  $P(b)$ .
2. Soit  $R$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)^2$ . Exprimer  $R$  en fonction de  $P(a)$  et de  $P'(a)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[972]

### Exercice 6 ★★ Reste par un produit –

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ . Sachant que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)$  vaut 1 et que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - b$  vaut  $-1$ , que vaut le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[624]

### Exercice 7 ★★★★★ –

Quel est le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^n - X^n - 1$  par

1.  $X^2 - 3X + 2$
2.  $X^2 + X + 1$
3.  $X^2 - 2X + 1$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[621]

---

**Exercice 8** ★★★★★ **Ils divisent ! –**

---

Démontrer que

1.  $X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos \theta + 1$  est divisible par  $X^2 - 2X \cos \theta + 1$  ;
2.  $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  est divisible par  $(X-1)^2$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[622]

---

**Exercice 9** ★★★★★ **Divisibilité et composition –**

---

Soient  $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$  avec  $P$  non-constant. On suppose que  $A \circ P \mid B \circ P$ . Démontrer que  $A \mid B$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[625]

---

**Exercice 10** ★★★★★ **Un reste –**

---

Soient  $n, p$  deux entiers naturels non nuls et soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ . Pour chaque  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $r_k$  le reste de la division euclidienne de  $k$  par  $p$ . Démontrer que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^p - 1$  est le polynôme  $R(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{r_k}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[626]

### 3 Arithmétique

---

**Exercice 11** ★ **Calculs de pgcd –**

---

Déterminer les pgcd suivants :

1.  $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$  et  $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$  ;
2.  $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$  et  $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$  ;
3.  $P(X) = X^n - 1$  et  $Q(X) = (X-1)^n, n \geq 1$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[627]

---

**Exercice 12** ★ **Équation de Bezout –**

---

Trouver deux polynômes  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $AU + BV = 1$ , où  $A(X) = X^7 - X - 1$  et  $B(X) = X^5 - 1$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[628]

---

**Exercice 13** ★ **Polynômes ayant un facteur commun –**

---

Soient  $P$  et  $Q$  des polynômes de  $[X]$  non constants. Montrer que  $P$  et  $Q$  ont un facteur commun si, et seulement si, il existe  $A, B \in [X], A \neq 0, B \neq 0$ , tels que  $AP = BQ$  et  $\deg(A) < \deg(Q), \deg(B) < \deg(P)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[629]

---

**Exercice 14** ★★★★★ **Pgcd de deux polynômes –**

---

Soient  $n, m \geq 1$ . Déterminer le pgcd de  $X^n - 1$  et  $X^m - 1$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[631]

### 4 Racines

---

**Exercice 15** ★ **Ordre de multiplicité –**

---

Quel est, pour  $n \geq 1$ , l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}?$$

**Exercice 16** ★ **CNS pour avoir une racine double –**

Soit  $n$  un nombre entier,  $a, b$  des réels et  $P(X) = \sum_{k=0}^n X^{k+2} + aX + b$ . A quelle(s) condition(s)  $P$  admet-il 1 comme racine double.

Indication ▼ Correction ▼

[2982]

**Exercice 17** ★ **Racines rationnelles –**

Soit  $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , avec  $a_n \neq 0$  et  $a_0 \neq 0$ . On suppose que  $P$  admet une racine rationnelle  $p/q$  avec  $p \wedge q = 1$ . Démontrer que  $p|a_0$  et que  $q|a_n$ . Le polynôme  $P(X) = X^5 - X^2 + 1$  admet-il des racines dans  $\mathbb{Q}$ ?

Indication ▼ Correction ▼

[633]

**Exercice 18** ★★ **Polynômes définis par certaines valeurs –**

1. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que  $P(-1) = 1$ ,  $P(0) = -1$  et  $P(1) = -1$ . Ce polynôme est-il unique?

2. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(-1) = 1$ ,  $P(0) = -1$  et  $P(1) = -1$ .

Indication ▼ Correction ▼

[970]

**Exercice 19** ★★★ **Somme des racines –**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ . On note, pour  $p < n$ ,  $u_p$  la somme des racines de  $P^{(p)}$ . Démontrer que  $u_0, \dots, u_{n-1}$  forme une progression arithmétique.

Indication ▼ Correction ▼

[632]

**Exercice 20** ★★★★ **Déterminer les racines sachant que... –**

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les racines de polynômes de degré 3 ou 4 connaissant des informations sur ces racines.

1. Soit  $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ . Déterminer les racines de  $P$  sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

2. Soit  $Q(X) = X^4 + 12X - 5$ . On note  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les racines de  $Q$ . On sait que  $x_1 + x_2 = 2$ .

Déterminer la valeur de  $x_1 x_2$ ,  $x_3 x_4$  et  $x_3 + x_4$ . En déduire les valeurs des racines.

3. Déterminer la valeur de  $x_1 x_2$ ,  $x_3 x_4$  et  $x_3 + x_4$ .

4. En déduire les valeurs des racines.

Indication ▼ Correction ▼

[634]

**Exercice 21** ★★ **Informations sur les racines –**

Déterminer les racines du polynôme  $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$  sachant qu'elles sont en progression arithmétique.

Indication ▼ Correction ▼

[645]

**Exercice 22** ★★★★ **Avec le théorème de Rolle –**

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $n$  ayant  $n$  racines réelles distinctes.

1. Démontrer que toutes les racines de  $P'$  sont réelles.

2. En déduire que le polynôme  $P^2 + 1$  n'admet que des racines simples (dans  $\mathbb{C}$ ).

3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que toutes les racines de  $P$  sont réelles.

Indication ▼ Correction ▼

[635]

**Exercice 23** ★★★★ **Isobarycentre –**

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n \geq 2$ . Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les racines de  $P$ , répétées avec leur ordre de multiplicité, d'images respectives dans le plan complexe  $A_1, \dots, A_n$ . Soit  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  les racines de  $P'$ , répétées avec leur ordre de multiplicité, d'images respectives dans le plan complexe  $B_1, \dots, B_{n-1}$ .

1. Montrer que les familles de points  $(A_1, \dots, A_n)$  et  $(B_1, \dots, B_{n-1})$  ont même isobarycentre.
2. Quelle est l'image dans le plan complexe de la racine de  $P^{(n-1)}$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[636]

### Exercice 24 ★★★★★ Condition pour que... –

1. Soit  $P(X) = 2X^3 - X^2 - 7X + \lambda$ , où  $\lambda$  est tel que la somme de deux racines de  $P$  vaut 1. Déterminer la troisième racine. En déduire la valeur de  $\lambda$ .

2. Soit  $Q(X) = X^3 - 7X + \mu$  où  $\mu$  est tel que l'une des racines de  $Q$  soit le double d'une autre. Déterminer les valeurs possibles des racines de  $Q$ , puis déterminer les valeurs de  $\mu$  pour lesquelles cette condition est possible.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[637]

### Exercice 25 ★★★★★ Équation –

Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(0) = 0$  et  $P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[638]

### Exercice 26 ★★★★★ Équations –

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$ .

Démontrer que si  $z \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ , il existe une racine de  $P$  de module supérieur strict à  $|z|$ . En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  solutions.

2. Démontrer que si  $z \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ , il existe une racine de  $P$  de module supérieur strict à  $|z|$ .

3. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  solutions.

4. Soit  $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$  vérifiant  $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ .

Démontrer que si  $z \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ , alors  $z = j$  ou  $z = j^2$ . En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  solution.

5. Démontrer que si  $z \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ , alors  $z = j$  ou  $z = j^2$ .

6. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  solution.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[639]

### Exercice 27 ★★★★★ Exponentiel! –

Soit, pour  $n \geq 0$ ,  $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ .

1. Démontrer que  $P_n$  admet  $n$  racines simples complexes.

2. Démontrer que, si  $n$  est impair, une et une seule de ces racines est réelle, et que si  $n$  est pair, aucune des racines n'est réelle.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[640]

### Exercice 28 ★★★★★ Polynômes à valeurs réelles –

1. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ .

2. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ .

3. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Démontrer que  $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$  si et seulement si  $P \in \mathbb{Q}[X]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[641]

## 5 Décomposition en produits d'irréductibles

### Exercice 29 ★★ Décomposer! –

Décomposer en produits d'irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

1.  $X^4 + 1$       2.  $X^8 - 1$       3.  $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[642]

### Exercice 30 ★★ Décomposer! –

Soit  $P$  le polynôme  $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ .

1. Décomposer  $X^4 - 6X^3 + 9X^2$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. En déduire une décomposition de  $P$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[644]

### Exercice 31 ★★ Factorisation simultanée! –

On considère les deux polynômes suivants :

$$P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24 \text{ et } Q(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15.$$

Décomposer ces deux polynômes en produits d'irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ , sachant qu'ils ont une racine commune.

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[646]

### Exercice 32 ★★ De grand degré! –

Décomposer en produits d'irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[647]

### Exercice 33 ★★ Racines $n$ -ièmes de l'unité –

1. Rappeler la décomposition en produits d'irréductibles de  $X^n - 1$ .
2. En déduire la décomposition en produits d'irréductibles de  $1 + X + \dots + X^{n-1}$ .
3. Calculer  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .
4. Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[648]

### Exercice 34 ★★ Tout polynôme positif est somme de deux carrés –

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  non constant tel que  $P(x) \geq 0$  pour tout réel  $x$ .

1. Montrer que le coefficient dominant de  $P$  est positif et que les racines réelles de  $P$  sont de multiplicité paire.

2. Montrer qu'il existe un polynôme  $C \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = C\bar{C}$ .

3. En déduire qu'il existe  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $P = A^2 + B^2$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[649]

### Exercice 35 ★★ Polynôme réciproque –

On dit qu'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$  est réciproque s'il s'écrit  $P = a_n X^n + \dots + a_0$  avec  $a_k = a_{n-k}$  pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$ .

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Démontrer que  $P$  est réciproque si et seulement si  $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

2. Montrer qu'un produit de polynômes réciproques est réciproque.

3. On suppose que  $P$  et  $Q$  sont réciproques et que  $Q|P$ . Démontrer que  $\frac{P}{Q}$  est réciproque.

4. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme réciproque.

Démontrer que si  $\alpha$  est une racine de  $P$ , alors  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha^{-1}$  est une racine de  $P$ . Démontrer que si 1 est une racine de  $P$ , alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2. Démontrer que si le degré de  $P$  est impair, alors  $-1$  est racine de  $P$ . Démontrer que si  $P$  est de degré pair et si  $-1$  est une racine de  $P$ , alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.

5. Démontrer que si  $\alpha$  est une racine de  $P$ , alors  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha^{-1}$  est une racine de  $P$ .
6. Démontrer que si 1 est une racine de  $P$ , alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.
7. Démontrer que si le degré de  $P$  est impair, alors  $-1$  est racine de  $P$ .
8. Démontrer que si  $P$  est de degré pair et si  $-1$  est une racine de  $P$ , alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.
9. Démontrer que tout polynôme réciproque de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $2n$  se factorise en

$$P = a_{2n}(X^2 + b_1X + 1) \dots (X^2 + b_nX + 1).$$

Que peut-on dire si le degré de  $P$  est impair ?

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[650]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Procéder par identification.

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Déterminer d'abord le degré éventuel d'une solution.

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Remarquer que  $P$  s'écrit  $\lambda(X - \alpha)P'$ , puis appliquer la formule de Taylor en  $\alpha$ .

**Indication pour l'exercice 4 ▲****Indication pour l'exercice 5 ▲**

1.  $R$  est de degré au plus 1. Évaluer en  $a$ , et en  $b$ .
2.  $R$  est de degré au plus 1. Évaluer en  $a$ , puis dériver...

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Que vaut  $P(a)$  ?  $P(b)$  ? Comment en déduire le reste ?

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Écrire a priori la division euclidienne, et tester la relation pour les racines du polynôme  $X^2 - 3X + 2, \dots$

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

Utiliser les racines de  $X^2 - 2X \cos \theta + 1$  et  $(X - 1)^2$ .

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Écrire à priori la division euclidienne de  $B$  par  $A$ , puis composer par  $P$ .

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Démontrer que  $X^p - 1$  divise  $P - R$ .

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

On applique l'algorithme d'Euclide pour les deux premiers. Pour le troisième, commencer par déterminer les diviseurs de  $Q$ .

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Utiliser l'algorithme d'Euclide.

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Utiliser le théorème de Gauss.

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

Effectuer la division euclidienne de  $X^n - 1$  par  $X^m - 1$ . On pourra écrire  $n = mq + r$ .

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

Dériver !

---

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

Calculer  $P(1)$ ,  $P'(1)$  et  $P''(1)$ .

---

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

Mettre tout au même dénominateur.

---

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

1. Utiliser les polynômes de Lagrange.
  2. Retirer le polynôme précédent !
- 

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

Retrouver la somme des racines comme coefficient du polynôme.

---

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

1. Utiliser les relations coefficients/racines pour déterminer la troisième racine, puis factoriser...
  2. Utiliser les relations coefficients/racines. Se ramener à un polynôme de degré 2.
  3. Utiliser les relations coefficients/racines.
  4. Se ramener à un polynôme de degré 2.
- 

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

Écrire que les racines sont  $a - r$ ,  $a$  et  $a + r$ . Trouver  $a$  et  $r$  à l'aide des relations coefficients-racines.

---

**Indication pour l'exercice 22 ▲**

1. Appliquer le théorème de Rolle.
  2. Les racines de  $P^2 + 1$  sont complexes !
  3. Le résultat de la première question reste vérifié, mais il faut tenir compte de l'ordre de multiplicité des racines.
- 

**Indication pour l'exercice 23 ▲**

1. Relations coefficients racines.
  2. Récurrence...
- 

**Indication pour l'exercice 24 ▲**

1. Factoriser par  $2X + 1$  ( $-1/2$  est l'autre racine).
  2. Utiliser à fond les relations coefficients/racines.
- 

**Indication pour l'exercice 25 ▲**

Calculer  $P(0)$ ,  $P(1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(5)$ , ...

---

**Indication pour l'exercice 26 ▲**

1. Démontrer que  $(z + 1)^2$  et  $(z - 1)^2$  sont aussi racines de  $P$ .
2. Démontrer que  $(z + 1)^2$  et  $(z - 1)^2$  sont aussi racines de  $P$ .
- 3.
4. Si  $z$  est racine, alors  $z^{2n}$  et  $(z + 1)^{2n}$  est racine...
5. Si  $z$  est racine, alors  $z^{2n}$  et  $(z + 1)^{2n}$  est racine...



6.

---

**Indication pour l'exercice 27 ▲**

1. Que vaut  $P_n - P'_n$ .
  2. Procéder par récurrence !
- 

**Indication pour l'exercice 28 ▲**

1. Utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss.
  2. Utiliser le polynôme conjugué.
  3. Utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.
- 

**Indication pour l'exercice 29 ▲**

1. Chercher les racines complexes.
  2.  $a^2 - b^2 = \dots$
  3.  $1 = -i^2$ .
- 

**Indication pour l'exercice 30 ▲**

1. Factoriser par  $X^2$ .
  2.  $9 = -(3i)^2$ .
- 

**Indication pour l'exercice 31 ▲**

Chercher le pgcd de  $P$  et  $Q$ .

---

**Indication pour l'exercice 32 ▲**

Commencer par décomposer  $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ .

---

**Indication pour l'exercice 33 ▲**

1. Quelles sont les racines de ce polynôme ?
  - 2.
  3. Évaluer la factorisation de la question précédente en 1 ;
  4. Évaluer le résultat de la première question en  $-2\theta$ .
- 

**Indication pour l'exercice 34 ▲**

1. Regarder la limite de  $P$  en  $+\infty$  et le comportement d'un polynôme au voisinage d'une racine de multiplicité impaire.
  2. Utiliser la décomposition de  $P$  en facteurs irréductibles.
  3. Écrire  $C = A + iB$ .
- 

**Indication pour l'exercice 35 ▲**

- 1.
2. Utiliser la première question.
3. Utiliser la première question.
4. Dériver la relation de la première question.  
Dériver la relation de la première question.
- 5.
6. Dériver la relation de la première question.
- 7.
8. Dériver la relation de la première question.

9. Procéder par récurrence sur  $n$ . Dans le cas des polynômes de degré impair, commencer par factoriser par  $X + 1$ .

---

---

**Correction de l'exercice 1 ▲**

Si  $P = Q^2$  est le carré d'un polynôme, alors  $Q$  est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1 ou est égal à  $-1$ . Dans le premier cas, on peut donc écrire  $Q(X) = X^2 + cX + d$ . On a alors

$$Q^2(X) = X^4 + 2cX^3 + (2d + c^2)X^2 + 2cdX + d^2.$$

Par identification, on doit avoir  $2c = 2a$ ,  $2d + c^2 = b$ ,  $2cd = 2$  et  $d^2 = 1$ . On trouve donc  $c = a$  et  $d = \pm 1$ . Si  $d = 1$ , alors  $c = 1$ , et donc  $a = 1$  et  $b = 3$ . Si  $d = -1$ , alors  $c = -1$ ,  $a = -1$  et  $b = -1$ . Les deux solutions sont donc

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2 \\ P_2(X) &= X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2. \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on écrit  $Q(X) = -R(X)$  avec  $R(X) = X^2 + cX + d$ , de sorte que  $Q^2(X) = R^2(X)$  et on retrouve en réalité le cas précédent.

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

1. Le polynôme nul est évidemment solution. Sinon, si  $P$  est solution, alors on a

$$2\deg(P) = \deg(P) + 2$$

ce qui prouve que  $\deg(P)$  doit être égal à 2. Maintenant, si  $P(X) = aX^2 + bX + c$ , alors

$$\begin{aligned} P(X^2) &= aX^4 + bX^2 + c \\ (X^2 + 1)P(X) &= aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c. \end{aligned}$$

On en déduit que  $b = 0$ , puis que  $a + c = 0$ . Les solutions sont donc les polynômes qui s'écrivent  $P(X) = a(X^2 - 1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Là encore, le polynôme nul est solution, et c'est la seule solution constante. Par ailleurs, si  $P$  est une solution non constante, alors son degré vérifie l'équation

$$2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$$

ce qui entraîne que  $\deg(P) = 2$ . Maintenant, si  $P(X) = aX^2 + bX + c$ , alors

$$\begin{aligned} P'^2 &= (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2 \\ 4P &= 4aX^2 + 4bX + 4c. \end{aligned}$$

Ceci entraîne  $a^2 = a$ , donc  $a = 1$  (le polynôme est de degré 2,  $a \neq 0$ ), puis  $c = b^2/4$ . Les polynômes solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes  $P(X) = X^2 + bX + b^2/4$ , avec  $b \in \mathbb{R}$ .

3. Si  $P$  est une solution qui n'est pas le polynôme nul, alors le degré de  $P \circ P$  vaut  $\deg(P)^2$ , et donc on a l'équation

$$\deg(P)^2 = \deg(P).$$

et donc  $\deg(P) = 1$  ou  $\deg(P) = 0$ . Maintenant, si  $P(X) = aX + b$ , alors

$$\begin{aligned} P \circ P(X) &= a(aX + b) + b = a^2X + (ab + b) \\ P(X) &= aX + b. \end{aligned}$$

On doit donc avoir  $a^2 = a$ , soit  $a = 1$  ou  $a = 0$ , et  $ab = 0$ . Si  $a = 1$ , alors  $b = 0$  et si  $a = 0$ , alors  $b$  peut être quelconque dans  $\mathbb{R}$ . Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme  $P(X) = X$ .

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

Puisque  $P' | P$ ,  $P = QP'$ , et les considérations de degré font que  $Q$  est de degré 1. On peut donc écrire :

$$P = \lambda(X - \alpha)P'.$$

On applique ensuite la formule de Taylor à  $P$  en  $\alpha$  :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k,$$

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n \frac{kP^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{k-1},$$

$$\lambda(X - \alpha)P'(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda k P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

Par identification, on obtient, pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$  :

$$\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (\lambda k - 1) = 0.$$

Maintenant,  $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$ , et donc  $\lambda = 1/n$ . Ceci entraîne par suite que, pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$ , on a :

$$P^{(k)}(\alpha) = 0.$$

Ainsi,

$$P(X) = \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^n,$$

ce qui prouve que  $P(X) = K(X - \alpha)^n$ , où  $K$  est une constante. La réciproque se vérifie aisément.

#### Correction de l'exercice 4 ▲

On trouve les résultats suivants :

1. Le quotient est  $X^2 + 2X + 7$ , le reste est nul ;
2. Le quotient est  $X^2 - 3X - 5$ , le reste est  $X + 3$  ;
3. Le quotient est  $X^3 - X - 1$ , le reste est  $X + 3$ .

#### Correction de l'exercice 5 ▲

Dans les deux cas, on remarquera que  $R$  est de degré au plus 1 et s'écrit donc  $R(X) = \alpha X + \beta$ .

1. Évaluons la relation

$$P(X) = (X - a)(X - b)Q(X) + \alpha X + \beta$$

en  $a$  et en  $b$ . On trouve le système

$$\begin{cases} \alpha a + \beta &= P(a) \\ \alpha b + \beta &= P(b). \end{cases}$$

On en déduit alors facilement que

$$\alpha = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \text{ et } \beta = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$

2. Évaluons la relation

$$P(X) = (X - a)^2 Q(X) + \alpha X + \beta$$

au point  $a$ . On trouve  $P(a) = a\alpha + \beta$ . Dérivons maintenant la relation précédente :

$$P'(X) = 2(X - a)Q(X) + (X - a)^2 Q'(X) + \alpha.$$

On évalue à nouveau en  $a$  et on trouve que

$$\alpha = P'(a).$$

En revenant à la première équation, on en déduit que  $\beta = P(a) - aP'(a)$ .

#### Correction de l'exercice 6 ▲

On sait que  $P(X) = (X - a)Q_1(x) + 1$ , et donc  $P(a) = 1$ . De même, on a  $P(b) = -1$ . La division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  s'écrit

$$P(X) = (X - a)(X - b)Q(X) + \alpha X + \beta.$$

On évalue cette relation en  $a$  et en  $b$ , et on trouve le système

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = 1 \\ \alpha b + \beta = -1. \end{cases}$$

La résolution de ce système ne pose pas de difficultés et donne comme unique solution

$$\alpha = \frac{2}{a - b} \text{ et } \beta = \frac{-a - b}{a - b}.$$

Le reste recherché est donc

$$\frac{2}{a - b}X + \frac{-a - b}{a - b}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

On rappelle qu'on note  $j$  le nombre complexe  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1. La méthode pour ce type d'exercice est toujours la même. On commence par écrire a priori le résultat de la division euclidienne, par exemple pour le premier polynôme :

$$(X + 1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + aX + b,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux réels. On évalue ensuite la relation en les racines du diviseur, qui sont ici 1 et 2. On trouve alors

$$\begin{cases} 2^n - 2 = a + b \\ 3^n - 2^n - 1 = 2a + b. \end{cases}$$

Et finalement on résout le système pour trouver  $a$  et  $b$ , qui sont ici égaux à :

$$\begin{cases} a = 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ b = -3^n + 2^{n+1} + 2^n - 3. \end{cases}$$

2. On peut toujours écrire que, par division euclidienne, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$(X + 1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 + X + 1) + aX + b,$$

et on utilise cette fois que les racines de  $X^2 + X + 1$  sont  $j$  et  $j^2$ . Il suffit ici en réalité d'utiliser l'évaluation en  $j$ , sachant que tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme  $x + jy$ , avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . On trouve :

$$(1 + j)^n - j^n - 1 = Q(j) \times 0 + aj + b.$$

On distingue ensuite suivant la valeur de  $n$  modulo 3, utilisant que  $1 + j + j^2 = 0$  qui donne

$$(1 + j)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1.$$

Si  $n \equiv 0 [3]$ , alors  $j^{2n} = j^n = 1$ , et donc on a

$$(-1)^n - 2 = aj + b.$$

On identifie alors les coefficients et on trouve  $a = 0$  et  $b = (-1)^n - 2$ . Ainsi le reste est  $(-1)^n - 2$ . Si  $n \equiv 1 [3]$ , alors  $j^n = j$  et donc  $j^{2n} = j^2 = -1 - j$ ,  $j^n = j$ , ce qui donne

$$((-1)^{n+1} - 1)j + ((-1)^{n+1} - 1) = aj + b.$$

On identifie les coefficients et on trouve

$$a = b = (-1)^{n+1} - 1.$$

Le reste est donc  $((-1)^{n+1} - 1)(X + 1)$ . Si  $n \equiv 2 [3]$ , alors  $j^{2n} = j$  et  $j^n = j^2 = -1 - j$ . On trouve

$$((-1)^n + 1)j = aj + b.$$

On identifie alors les coefficients et on trouve  $a = (-1)^n + 1$  et  $b = 0$ . Le reste est alors  $((-1)^n + 1)X$ .

3. Si  $n \equiv 0 [3]$ , alors  $j^{2n} = j^n = 1$ , et donc on a

$$(-1)^n - 2 = aj + b.$$

On identifie alors les coefficients et on trouve  $a = 0$  et  $b = (-1)^n - 2$ . Ainsi le reste est  $(-1)^n - 2$ .

4. Si  $n \equiv 1 [3]$ , alors  $j^n = j$  et donc  $j^{2n} = j^2 = -1 - j$ ,  $j^n = j$ , ce qui donne

$$((-1)^{n+1} - 1)j + ((-1)^{n+1} - 1) = aj + b.$$

On identifie les coefficients et on trouve

$$a = b = (-1)^{n+1} - 1.$$

Le reste est donc  $((-1)^{n+1} - 1)(X + 1)$ .

5. Si  $n \equiv 2 [3]$ , alors  $j^{2n} = j$  et  $j^n = j^2 = -1 - j$ . On trouve

$$((-1)^n + 1)j = aj + b.$$

On identifie alors les coefficients et on trouve  $a = (-1)^n + 1$  et  $b = 0$ . Le reste est alors  $((-1)^n + 1)X$ .

6. On recommence en écrivant

$$(X + 1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 - 2X + 1) + aX + b,$$

avec  $a$  et  $b$  deux réels, et on remarque que  $X^2 - 2X + 1$  a pour racine double 1. Si on évalue en 1, on obtient une seule relation, à savoir

$$2^n - 2 = a + b.$$

Pour obtenir une seconde relation, il faut dériver la relation issue de la division euclidienne et l'évaluer à nouveau en 1 (c'est toujours cette méthode qui fonctionne pour une racine double). On trouve :

$$n(X + 1)^{n-1} - nX^{n-1} = Q'(X)(X^2 - 2X + 1) + 2Q(X)(X - 1) + a,$$

ce qui donne la relation

$$n2^{n-1} - n = a.$$

On retrouve alors sans problèmes  $b$ , qui est égal à :

$$b = (2 - n)2^{n-1} + n - 2.$$

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Pour prouver que  $X^2 - 2X \cos \theta + 1$  divise  $X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos \theta + 1$ , il suffit de prouver que ce dernier polynôme s'annule en les deux racines (complexes) de  $X^2 - 2X \cos \theta + 1$ , à savoir  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$ . Il suffit de prouver le résultat pour  $e^{i\theta}$  car, le polynôme étant réel, si  $z$  est racine, son conjugué  $\bar{z}$  est racine. On trouve

$$\begin{aligned} & e^{i(n+1)\theta} \cos((n-1)\theta) - e^{in\theta} \cos(n\theta) - e^{i\theta} \cos \theta + 1 = \\ & \left( \cos((n+1)\theta) \cos((n-1)\theta) - \cos^2(n\theta) - \cos^2 \theta + 1 \right) + \\ & i \left( \sin((n+1)\theta) \cos((n-1)\theta) - \sin(n\theta) \cos(n\theta) - \sin \theta \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Le reste n'est plus qu'une affaire de formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) &= \frac{1}{2}(\cos(2n\theta) + \cos(2\theta)) \\ \cos^2(n\theta) &= \frac{1}{2}(\cos(2n\theta) + 1) \\ \cos^2\theta &= \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1) \\ \sin((n+1)\theta)\cos((n-1)\theta) &= \frac{1}{2}(\sin(2n\theta) + \sin(2\theta)) \\ \sin(n\theta)\cos(n\theta) &= \frac{1}{2}\sin(2n\theta) \\ \sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{2}\sin(2\theta).\end{aligned}$$

En faisant les bonnes sommes et différences des relations précédentes, on trouve bien que

$$e^{i(n+1)\theta}\cos((n-1)\theta) - e^{in\theta}\cos(n\theta) - e^{i\theta}\cos\theta + 1 = 0.$$

2. Cette fois, on a affaire à une racine d'ordre 2, et il suffit de prouver que 1 est racine de  $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  et de  $P'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$ , ce qui est évident... Pour justifier cela, on peut faire appel à la partie du cours consacrée aux racines, ou partir de la division euclidienne

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = Q(X)(X-1)^2 + aX + b.$$

Faire  $X = 1$  dans la relation précédente donne  $a + b = 0$ . De plus, si on dérive la relation précédente et qu'on fait à nouveau  $X = 1$ , on obtient  $a = 0$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

On écrit la division euclidienne de  $B$  par  $A$ ,  $B = AQ + R$  avec  $\deg(R) < \deg(A)$ . On compose alors par  $P$ , et on obtient  $B \circ P = (A \circ P) \times (Q \circ P) + R \circ P$ . Or, le polynôme  $A \circ P$  a pour degré  $\deg(A) \times \deg(P)$ . Le polynôme  $R \circ P$  a pour degré  $\deg(R) \times \deg(P)$ . On en déduit que  $\deg(R \circ P) < \deg(A \circ P)$  et donc que  $B \circ P = (A \circ P) \times (Q \circ P) + R \circ P$  est la division euclidienne de  $B \circ P$  par  $A \circ P$ . Mais on sait que  $A \circ P \mid B \circ P$  et donc on en déduit que  $R \circ P$  est égal à 0. Ceci n'est possible que si  $R = 0$ , et donc  $A \mid B$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

On va démontrer que  $X^p - 1$  divise  $P - R$ . En effet, le degré de  $R$  est inférieur strict à  $p$ , et  $R$  sera bien le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $X^p - 1$ . On écrit alors que

$$P - R = \sum_{k=0}^n a_k(X^k - X^{r_k}),$$

et il suffit de prouver que  $X^p - 1$  divise chaque  $X^k - X^{r_k}$ . Si  $k < p$ , alors  $r_k = k$  et donc  $X^p - 1$  divise  $X^k - X^{r_k} = 0$ . Sinon, écrivons  $k = mp + r_k$ , avec  $m \geq 1$ , d'où l'on tire

$$X^k - X^{r_k} = X^{r_k}(X^{mp} - 1) = X^{r_k}(X^p - 1)(1 + X^p + \dots + X^{(m-1)p}).$$

$X^p - 1$  divise bien  $P - R$  !

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. On applique l'algorithme d'Euclide. Le dernier reste non-nul donne un pgcd des deux polynômes. On a successivement :

$$\begin{aligned}X^4 - 3X^3 + X^2 + 4 &= (X^3 - 3X^2 + 3X - 2)X + (-2X^2 + 2X + 4) \\ X^3 - 3X^2 + 3X - 2 &= (-2X^2 + 2X + 4)\left(\frac{-X}{2} + 1\right) + 3X - 6 \\ (-2X^2 + 2X + 4) &= (3X - 6) \times \left(\frac{-2X}{3} - \frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Un pgcd est donc  $3X - 6$  (ou  $X - 2$ ).

2. On répète le même procédé :

$$\begin{aligned}X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 &= (X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1)1 + 2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 \\X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 &= (2X^3 - 4X^2 + 4X - 2)((X^2)/2 + X/2) + X^2 - X + 1 \\2X^3 - 4X^2 + 4X - 2 &= (X^2 - X + 1)(2X - 2) + 0\end{aligned}$$

Un pgcd des deux polynômes est donc  $X^2 - X + 1$ .

3. Les diviseurs non-constants de  $Q$  sont les polynômes du type  $c(X - 1)^p$ , avec  $1 \leq p \leq n$ . Parmi ces diviseurs, seuls ceux de la forme  $c(X - 1)$  divisent aussi  $P$  (par exemple, car 1 est racine simple et non double de  $P$ , ou bien parce qu'on sait comment décomposer  $P$  en produits d'irréductibles...). Ainsi,  $P \wedge Q = X - 1$ .

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

On utilise l'algorithme d'Euclide. On a

$$\begin{aligned}X^7 - X - 1 &= (X^5 - 1)X^2 + X^2 - X - 1 \\X^5 - 1 &= (X^2 - X - 1)(X^3 + X^2 + 2X + 3) + 5X + 2 \\X^2 - X - 1 &= (5X + 2)(X/5 - 7/25) - 11/25.\end{aligned}$$

On remonte ensuite les calculs. On va partir plutôt de

$$11 = -25(X^2 - X - 1) + (5X - 7)(5X + 2)$$

pour éviter de trainer des fractions. On trouve alors successivement :

$$\begin{aligned}11 &= -25(X^2 - X - 1) + (5X - 7)((X^5 - 1) - (X^2 - X - 1)(X^3 + X^2 + 2X + 3)) \\&= (-5X^4 + 2X^3 - 3X^2 - X - 4)(X^2 - X - 1) + (5X - 7)(X^5 - 1) \\&= (-5X^4 + 2X^3 - 3X^2 - X - 4)(X^7 - X - 1) + (5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7)(X^5 - 1).\end{aligned}$$

Il suffit de diviser par 11 pour obtenir les polynômes  $U$  et  $V$ .

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

Supposons que  $P$  et  $Q$  ont un facteur commun  $D$ . On factorise  $P = DB$  et  $Q = DA$ ,  $A$  et  $B$  vérifient les conditions voulues. Réciproquement, si  $P \wedge Q = 1$  et  $AP = BQ$ , alors  $P|BQ$  et par le théorème de Gauss  $P|B$ . Ceci contredit les contraintes imposées à  $B$ .

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

Une idée possible est d'appliquer l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de ces deux polynômes. On suppose par exemple  $n > m$ , et on écrit  $n = mp + r$ , avec  $0 \leq r < m$ . Alors on a :

$$X^n - 1 = X^{mp+r} - 1 = X^r(X^{mp} - 1) + X^r - 1.$$

Le point crucial est que  $X^{mp} - 1$  est divisible par  $X^m - 1$ . En effet,

$$X^{mp} - 1 = (X^m - 1)(X^{m(p-1)} + X^{m((p-1)-1)} + \dots + X^m + 1).$$

Ainsi,  $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \text{pgcd}(X^m - 1, X^r - 1)$ . Mais puisque  $\text{pgcd}(n, m) = \text{pgcd}(m, r)$ , on en déduit finalement que

$$\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\text{pgcd}(n, m)} - 1.$$

---

### Correction de l'exercice 15 ▲



---

On vérifie d'abord que  $P_n(2) = 0$  et donc que 2 est racine de  $P_n$ . Ensuite, on calcule la dérivée :

$$P'_n(X) = n(n+2)X^{n+1} - (4n+1)(n+1)X^n + 4n(n+1)X^{n-1} - 4(n-1)X^{n-2}$$

(si  $n = 1$ , le dernier terme est interprété comme le polynôme nul). En particulier, on a

$$\begin{aligned} P'_n(2) &= n(n+2)2^{n+1} - (4n+1)(n+1)2^n + 4n(n+1)2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} \\ &= 2^{n-2}(8n(n+2) - 4(4n+1)(n+1) + 8n(n+1) - 4(n-1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On dérive une fois encore :

$$P''_n(X) = n(n+1)(n+2)X^n - (4n+1)n(n+1)X^{n-1} + 4n(n+1)(n-1)X^{n-2} - 4(n-1)(n-2)X^{n-3},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} P''_n(2) &= 2^{n-3}(8n(n+1)(n+2) - 4(4n+1)n(n+1) + 8n(n+1)(n-1) - 4(n-1)(n-2)) \\ &= 2^n(2n-1) \end{aligned}$$

Puisque  $2n-1$  ne s'annule pas quand  $n$  est un entier, on a  $P_n(2) = P'_n(2) = 0$  et  $P''_n(2) \neq 0$ . 2 est racine de multiplicité 2 de  $P_n$ . On aurait aussi factoriser  $P$  sous la forme  $P(X) = X^{n-1}Q(X)$  et étudier (par la même méthode) la multiplicité de 2 comme racine de  $Q$ .

---

### Correction de l'exercice 16 ▲

D'abord, pour que 1 soit racine double de  $P$ , il est nécessaire que  $P(1) = 0$  et  $P'(1) = 0$ . Mais

$$P(1) = \sum_{k=0}^n 1 + a + b = n + 1 + a + b.$$

D'autre part,

$$P'(X) = \sum_{k=0}^n (k+2)X^{k+1} + a$$

de sorte que

$$P'(1) = \sum_{k=0}^n (k+2) + a = \sum_{k=0}^n k + 2(n+1) + a = \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) + a.$$

On a donc  $P'(1) = 0$  si et seulement si

$$a = -2(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = -\frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

Ensuite, cette valeur de  $a$  étant fixée, on a  $P(1) = 0$  si et seulement si

$$b = -a - (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Pour que 1 soit une racine double, il suffit maintenant que  $P''(1) \neq 0$ . Mais

$$P''(X) = \sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)X^k$$

de sorte que

$$P''(1) = \sum_{k=0}^n (k+2)(k+1) > 0.$$

Ainsi, 1 est racine double de  $P$  si et seulement si

$$a = -\frac{(n+1)(n+4)}{2} \text{ et } b = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

---

**Correction de l'exercice 17 ▲**

---

On écrit que  $P(p/q) = 0$  et on met tout au même dénominateur en multipliant par  $q^n$ . On trouve

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

On commence par isoler  $a_0 q^n$  et on trouve que

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

En particulier,  $p|a_0 q^n$ . Puisque  $p \wedge q = 1$ , on en déduit que  $p|a_0$ . De même, en isolant  $a_n p^n$ , on trouve

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n,$$

soit  $q|a_n p^n$ , soit, puisque  $p \wedge q = 1$ ,  $q|a_n$ . Par conséquent, si le polynôme  $X^5 - X^2 + 1$  admet une racine rationnelle  $p/q$ , alors  $p|1$  et  $q|1$ , et donc  $p = \pm 1$  et  $q = \pm 1$ . Autrement dit, les seules racines rationnelles possibles sont 1 et  $-1$ . Or, elles ne sont pas racines de  $P$ . Donc  $P$  n'admet pas de racines rationnelles.

---

**Correction de l'exercice 18 ▲**

---

1. Considérons les polynômes de Lagrange  $L_{-1}$ ,  $L_0$  et  $L_1$  associés au triplet  $(-1, 0, 1)$ . Ils sont donnés par

$$L_{-1}(X) = \frac{X(X-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{X^2 - X}{2},$$

$$L_0(X) = \frac{(X+1)(X-1)}{(0+1)(0-1)} = -(X^2 - 1),$$

$$L_1(X) = \frac{(X+1)X}{(1+1)1} = \frac{X^2 + X}{2}.$$

Alors un polynôme qui convient est le polynôme

$$P_0(X) = 1L_{-1}(X) - 1L_0(X) - 1L_1(X) = X^2 - X - 1.$$

C'est le seul qui convient, car si  $P$  est un polynôme de degré (inférieur ou égal à) 2 qui convient, alors  $P - P_0$  est de degré au plus 2 et admet au moins 3 racines : c'est donc le polynôme nul.

2. Soit  $P$  un tel polynôme. Alors, utilisant le polynôme  $P_0$  introduit à la question précédente, et posant  $Q = P - P_0$ , on a  $Q(-1) = Q(0) = Q(1) = 0$ . Autrement dit,  $Q$  est divisible par  $(X+1)X(X-1) = X^3 - X$ , et  $P$  s'écrit

$$P(X) = X^2 - X - 1 + A(X)(X^3 - X)$$

avec  $A \in \mathbb{R}[X]$ . Réciproquement, tous les polynômes de cette forme conviennent.

---

**Correction de l'exercice 19 ▲**

---

Écrivons

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0.$$

Alors, par les relations coefficients/racines, on sait que la somme des racines de  $P$  vaut  $u_0 = -a_{n-1}/a_n$ . Plus généralement, on a

$$P^{(p)}(X) = n(n-1)\dots(n-p+1)a_n X^{n-p} + (n-1)\dots(n-p)a_{n-1} X^{n-p-1} + \dots + p!a_p,$$

de sorte que

$$u_p = -\frac{(n-1)\dots(n-p)}{n(n-1)\dots(n-p+1)} \times \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(n-p)}{n} \times \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

On a donc

$$u_{p+1} - u_p = - \left( \frac{n-p-1}{n} - \frac{n-p}{n} \right) \times \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

On obtient bien une progression arithmétique de raison  $\frac{a_{n-1}}{na_n}$ .

---

### Correction de l'exercice 20 ▲

1. Notons  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  les trois racines, avec par exemple  $x_3 = x_1 + x_2$ . Alors les relations coefficients/racines nous disent que  $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ . En particulier, on trouve  $x_3 = 4$ , et donc  $P$  se factorise en  $P(X) = (X-4)Q(X)$ . La division euclidienne donne  $Q(X) = X^2 - 4X + 7$ , dont les racines sont  $2 + i\sqrt{3}$  et  $2 - i\sqrt{3}$ .

2. On va utiliser les relations coefficients/racines. Pour cela, on développe

$$\begin{aligned} (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4) = \\ X^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)X^3 + (x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)X^2 - \\ (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)X + x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

On sait que

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \implies x_3 + x_4 = -2.$$

De plus,

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0.$$

On peut réécrire ceci en

$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1+x_2)(x_3+x_4) = 0$$

soit

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 4.$$

On a également

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -12.$$

Ceci donne

$$x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2) = -12 \implies x_1x_2 - x_3x_4 = 6.$$

Ceci suffit à déterminer  $x_1x_2 = 5$  et  $x_3x_4 = -1$ . De  $x_1 + x_2 = 2$  et  $x_1x_2 = 5$ , on tire que  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines de  $X^2 - 2X + 5$ , ie  $1 \pm 2i$ . De même,  $x_3$  et  $x_4$  sont les racines de  $X^2 + 2X - 1$ , ie  $-1 \pm \sqrt{2}$ .

3. On va utiliser les relations coefficients/racines. Pour cela, on développe

$$\begin{aligned} (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4) = \\ X^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)X^3 + (x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)X^2 - \\ (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)X + x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

On sait que

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \implies x_3 + x_4 = -2.$$

De plus,

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0.$$

On peut réécrire ceci en

$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1+x_2)(x_3+x_4) = 0$$

soit

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 4.$$

On a également

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -12.$$

Ceci donne

$$x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2) = -12 \implies x_1x_2 - x_3x_4 = 6.$$

Ceci suffit à déterminer  $x_1x_2 = 5$  et  $x_3x_4 = -1$ .

4. De  $x_1 + x_2 = 2$  et  $x_1x_2 = 5$ , on tire que  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines de  $X^2 - 2X + 5$ , ie  $1 \pm 2i$ . De même,  $x_3$  et  $x_4$  sont les racines de  $X^2 + 2X - 1$ , ie  $-1 \pm \sqrt{2}$ .

---

### Correction de l'exercice 21 ▲

Puisque les racines sont en progression arithmétique, elles peuvent s'écrire  $a - r$ ,  $a$  et  $a + r$ , où  $r$  est la raison de cette progression arithmétique. On obtient donc

$$\begin{aligned} 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3 &= 8(X - (a - r))(X - a)(X - (a + r)) \\ &= 8X^3 - 24aX^2 + *X - 8a(a - r)(a + r). \end{aligned}$$

Par identification, on trouve  $24a = 12$ , soit  $a = 1/2$ , puis

$$-4\left(\frac{1}{4} - r^2\right) = 3 \implies r = \pm 1.$$

Les 3 racines sont donc  $-1/2$ ,  $1/2$  et  $3/2$ , et le polynôme se factorise en

$$8X^3 - 12X^2 - 2X + 3 = (2X + 1)(2X - 1)(2X - 3).$$

---

### Correction de l'exercice 22 ▲

1. Soient  $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$  les racines de  $P$ . Alors, la fonction polynômiale  $x \mapsto P(x)$  est continue et dérivable sur chaque  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  et s'annule aux bornes de cet intervalle. Par le théorème de Rolle, on en déduit l'existence de  $\beta_i \in ]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$  tel que  $P'(\beta_i) = 0$ . Les réels  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  sont alors distincts et sont des zéros de  $P'$ . Comme  $P'$  est de degré  $n - 1$ , on a trouvé toutes les racines de  $P'$ .

2. On commence par remarquer que les racines de  $P^2 + 1$  sont nécessairement complexes, ce polynôme étant supérieur ou égal à 1 sur  $\mathbb{R}$ . De plus, sa dérivée est  $2PP'$ , dont les racines sont toutes réelles par hypothèse et d'après le résultat de la question précédente. Ainsi,  $P^2 + 1$  et son polynôme dérivé n'ont pas de racines communes. Toutes les racines de  $P^2 + 1$  sont donc simples.

3. Il suffit de prouver que toutes les racines de  $P'$  sont réelles, et on obtiendra par le même raisonnement le résultat de la question 2. Il faut cette fois tenir compte de l'ordre de multiplicité des racines. Ainsi, notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  les racines de  $P$ ,  $\alpha_i$  étant de multiplicité  $m_i$ . On sait que  $m_1 + \dots + m_p = n$ . Chaque  $\alpha_i$  reste racine de  $P'$ , de multiplicité  $m_i - 1$  (avec l'abus de langage qu'une racine de multiplicité 0 n'est plus une racine...). De plus, le théorème de Rolle nous donne des nouvelles racines  $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ , avec  $\beta_i \in ]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ . La somme des multiplicités des racines de  $P'$  que l'on a trouvé est donc :

$$\sum_{i=1}^p (m_i - 1) + (p - 1) = n - p + p - 1 = n - 1.$$

Puisque  $P'$  est de degré  $n - 1$ , on a trouvé toutes les racines de  $P'$  qui sont donc réelles.

---

### Correction de l'exercice 23 ▲

1. On peut toujours supposer que  $P$  est unitaire. On l'écrit donc  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots$ . Les relations coefficients/racines donnent

$$-a_{n-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

$P'$  s'écrit  $P'(X) = nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \dots$ . Les relations coefficients/racines donnent cette fois

$$\frac{-(n-1)a_{n-1}}{n} = \beta_1 + \dots + \beta_{n-1}.$$

Mettant ensemble ces deux équations, on voit facilement que

$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} = \frac{\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}}{n-1},$$

ce qui est la relation désirée.

2. Par récurrence,  $P, P', P'', \dots, P^{(n-1)}$  sont tels que la famille de leurs racines respectives ont même isobarycentre. En particulier,  $P^{(n-1)}$  n'a qu'une seule racine qui est l'isobarycentre des racines de  $P$ .

---

#### Correction de l'exercice 24 ▲

1. Notons  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les 3 racines, avec par exemple  $x_1 + x_2 = 1$ . Les relations coefficients/racines donnent  $x_1 + x_2 + x_3 = 1/2$  (attention au coefficient dominant !), et donc  $x_3 = -1/2$ . Ainsi, on sait que  $-1/2$  doit être racine de  $P$ . Autrement dit,  $P$  doit être divisible par  $2X + 1$  et donc  $P(-1/2) = 0$ . Ceci implique nécessairement que  $\lambda = -3$ . C'est aussi suffisant, car dans ce cas les racines sont  $-1/2$  et les racines de  $X^2 - X - 3$ , dont la somme fait 1.

2. Notons  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les trois racines de  $Q$ , avec par exemple  $x_2 = 2x_1$ . Les relations coefficients/racines donnent  $x_3 = -3x_1$ , puis

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7 \implies x_1^2 = 1.$$

On en déduit que  $x_1 = \pm 1$ . Si  $x_1 = 1$ , on a  $x_2 = 2$  et  $x_3 = -3$ . On obtient alors  $\mu = 6$ . Dans le deuxième cas, on a  $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 3$  et  $\mu = -6$ .

---

#### Correction de l'exercice 25 ▲

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$ . Pour  $x = 0$ , on trouve  $P(1) = 1$ . Pour  $x = 1$ , on trouve  $P(2) = 2$ . Pour  $x = 2$ , on trouve  $P(5) = 5$ . Pour  $x = 5$ , on trouve  $P(5^2 + 1) = 5^2 + 1$ . Ceci nous incite à considérer la suite définie par  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$  et  $u_0 = 0$ . Il est aisé de prouver que cette suite est strictement croissante. De plus, on prouve par récurrence sur  $n$  que  $P(u_n) = u_n$ . En effet, la propriété est vraie pour  $n = 0, 1, 2, 3$ . Si elle est vraie au rang  $n$ , alors on a

$$P(u_{n+1}) = P(u_n^2 + 1) = (P(u_n))^2 + 1 = u_n^2 + 1 = u_{n+1}$$

ce qui prouve l'hérédité. Posons alors  $Q(X) = P(X) - X$ .  $Q$  est un polynôme qui s'annule en chaque  $u_n$ . Comme les  $u_n$  sont tous différents,  $Q$  admet une infinité de racines. Donc  $Q$  est identiquement nulle et on a  $P(X) = X$ . Réciproquement,  $X$  convient.

---

#### Correction de l'exercice 26 ▲

1. Soit  $z$  une racine de  $P$ . L'équation vérifiée par  $P$  s'écrit aussi  $P((X+1)^2) = P(X)P(X+2)$ , et donc  $(z+1)^2$  est aussi racine de  $P$ . De même,  $(z-1)^2$  est aussi racine de  $P$ . On va prouver qu'au moins un des deux nombres complexes  $(z+1)^2$  ou  $(z-1)^2$  est de module supérieur strict à  $z$ . En effet,  $(z+1)^2 - (z-1)^2 = 4z$ , et donc

$$4|z| \leq |z+1|^2 + |z-1|^2.$$

Ainsi, l'un de ces deux nombres complexes est de module supérieur ou égal à  $2|z|$ . Si  $|z| \neq 0$ , le résultat est prouvé. Sinon, si  $z = 0$ , le résultat est trivial. Si  $P$  admet une racine (complexe), alors il en admet d'après la question précédente une infinité. C'est donc le polynôme nul. Les polynômes qui sont solutions de l'équation ne peuvent donc être que des polynômes constants, et les seuls polynômes constants solutions sont les polynômes  $P(X) = 0$  et  $P(X) = 1$ .

2. Soit  $z$  une racine de  $P$ . L'équation vérifiée par  $P$  s'écrit aussi  $P((X+1)^2) = P(X)P(X+2)$ , et donc  $(z+1)^2$  est aussi racine de  $P$ . De même,  $(z-1)^2$  est aussi racine de  $P$ . On va prouver qu'au moins un des deux nombres complexes  $(z+1)^2$  ou  $(z-1)^2$  est de module supérieur strict à  $z$ . En effet,  $(z+1)^2 - (z-1)^2 = 4z$ , et donc

$$4|z| \leq |z+1|^2 + |z-1|^2.$$

Ainsi, l'un de ces deux nombres complexes est de module supérieur ou égal à  $2|z|$ . Si  $|z| \neq 0$ , le résultat est prouvé. Sinon, si  $z = 0$ , le résultat est trivial.

3. Si  $P$  admet une racine (complexe), alors il en admet d'après la question précédente une infinité. C'est donc le polynôme nul. Les polynômes qui sont solutions de l'équation ne peuvent donc être que des polynômes constants, et les seuls polynômes constants solutions sont les polynômes  $P(X) = 0$  et  $P(X) = 1$ .

4. En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que si  $z$  est racine de  $P$ , alors  $z^2$  et  $(z+1)^2$  sont aussi des racines de  $P$ . Par récurrence,  $z^{2^n}$  et  $(z+1)^{2^n}$  seront racines pour tout entier  $n$ . Puisque le polynôme n'admet qu'un nombre fini de racines, les suites  $(z^{2^n})_n$  et  $((z+1)^{2^n})_n$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Le premier point nous dit qu'on a nécessairement  $z = 0$  ou  $|z| = 1$ . On note  $\Gamma_1$  cet ensemble. Le second point nous dit que  $z = -1$  ou  $|z+1| = 1$ , ensemble que l'on note  $\Gamma_2$ . Il est facile de vérifier (par exemple, en dessinant ses ensembles), que les points d'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont  $0, -1, j$  et  $j^2$ . Mais si  $z = 0$  est racine, alors  $(z+1)^2 = 1$  est aussi racine, ce qui n'est pas possible. De même, si  $z = -1$  est racine, alors  $(z+1)^2 = 0$  est racine, ce qui n'est pas (plus) possible. Donc les seules racines de  $P$  sont  $j$  et  $j^2$ . Puisque  $P$  est à coefficients réels,  $j$  et  $j^2$ , qui sont des complexes conjugués, doivent être des racines de même multiplicité. On doit donc avoir  $P(X) = \lambda(X-j)^n(X-j^2)^n = \lambda(X^2+X+1)^n$ . Par identification des coefficients dominants, on trouve  $\lambda = 1$ . Réciproquement, on vérifie facilement que les polynômes  $P(X) = (X^2+X+1)^n$  sont solutions de l'équation.

5. En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que si  $z$  est racine de  $P$ , alors  $z^2$  et  $(z+1)^2$  sont aussi des racines de  $P$ . Par récurrence,  $z^{2^n}$  et  $(z+1)^{2^n}$  seront racines pour tout entier  $n$ . Puisque le polynôme n'admet qu'un nombre fini de racines, les suites  $(z^{2^n})_n$  et  $((z+1)^{2^n})_n$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Le premier point nous dit qu'on a nécessairement  $z = 0$  ou  $|z| = 1$ . On note  $\Gamma_1$  cet ensemble. Le second point nous dit que  $z = -1$  ou  $|z+1| = 1$ , ensemble que l'on note  $\Gamma_2$ . Il est facile de vérifier (par exemple, en dessinant ses ensembles), que les points d'intersection de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont  $0, -1, j$  et  $j^2$ . Mais si  $z = 0$  est racine, alors  $(z+1)^2 = 1$  est aussi racine, ce qui n'est pas possible. De même, si  $z = -1$  est racine, alors  $(z+1)^2 = 0$  est racine, ce qui n'est pas (plus) possible. Donc les seules racines de  $P$  sont  $j$  et  $j^2$ .

6. Puisque  $P$  est à coefficients réels,  $j$  et  $j^2$ , qui sont des complexes conjugués, doivent être des racines de même multiplicité. On doit donc avoir  $P(X) = \lambda(X-j)^n(X-j^2)^n = \lambda(X^2+X+1)^n$ . Par identification des coefficients dominants, on trouve  $\lambda = 1$ . Réciproquement, on vérifie facilement que les polynômes  $P(X) = (X^2+X+1)^n$  sont solutions de l'équation.

### Correction de l'exercice 27 ▲

1. Un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n$  admettant toujours  $n$  racines complexes, lorsqu'elles sont comptées avec leur multiplicité, il suffit de prouver que  $P_n$  n'admet que des racines simples, ou encore que  $P_n$  et  $P'_n$  n'ont pas de racines communes. Mais  $P'_n = P_{n-1}$  et donc,  $P_n(X) = P'_n(X) + \frac{X^n}{n!}$ . Ainsi, si  $P'_n(a) = 0$ , alors  $P_n(a) = \frac{a^n}{n!}$ , et ceci ne peut être nul que si  $a = 0$ . Reste à voir que  $P_n(0)$  n'est jamais nul. Mais c'est clair car  $P_n(0) = 1$ .

2. On va prouver par récurrence la proposition suivante :

$\mathcal{P}_n$  :

si  $n$  est pair, alors  $P_n$  n'admet pas de racines réelles ; si  $n$  est impair, alors  $P_n$  admet une seule racine réelle  $a_n$ . De plus,  $P_n(x) < 0$  pour  $x < a_n$  et  $P_n(x) > 0$  pour  $x > a_n$ .

La propriété  $\mathcal{P}_0$  est vraie. Supposons  $P_n$  vraie, et prouvons  $\mathcal{P}_{n+1}$ . Le point de départ est la relation  $P'_{n+1} = P_n$ .

Si  $n+1$  est impair, alors  $n$  est pair et  $P_n$  ne s'annule jamais, et sa limite en  $+\infty$  vaut  $+\infty$ . On en déduit que  $P_n$  est toujours strictement positif. Ainsi,  $P_{n+1}$  est strictement croissant. Ce polynôme ne peut s'annuler au plus qu'une fois et de plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_{n+1}(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$  (n'oublions pas que  $n+1$  est impair). Par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient bien l'existence de  $a_{n+1}$  tel que  $P_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ , et la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vérifiée. Si  $n+1$  est pair, alors  $n$  est impair, et  $P_n(x) < 0$  pour  $x < a_n$  tandis que  $P_n(x) > 0$  pour  $x > a_n$ . On en déduit que  $P_{n+1}$  est décroissant de  $-\infty$  à  $a_n$ , puis croissant de  $a_n$  à  $+\infty$ . Or,

$$P_{n+1}(a_n) = P_n(a_n) + \frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0 + \frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mais  $a_n \neq 0$  (car  $P_n(0) = 1$ ), et  $n+1$  est pair donc  $a_n^{n+1} > 0$ . On en déduit que  $P_{n+1}(a_n) > 0$ , puis que  $P_{n+1}$  est toujours strictement positif sur  $\mathbb{R}$ , ce qui prouve la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  lorsque  $n+1$  est pair.

3. si  $n$  est pair, alors  $P_n$  n'admet pas de racines réelles ;

4. si  $n$  est impair, alors  $P_n$  admet une seule racine réelle  $a_n$ . De plus,  $P_n(x) < 0$  pour  $x < a_n$  et  $P_n(x) > 0$  pour  $x > a_n$ .

5. Si  $n+1$  est impair, alors  $n$  est pair et  $P_n$  ne s'annule jamais, et sa limite en  $+\infty$  vaut  $+\infty$ . On en déduit que  $P_n$  est toujours strictement positif. Ainsi,  $P_{n+1}$  est strictement croissant. Ce polynôme ne peut s'annuler au plus qu'une fois et de plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_{n+1}(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$  (n'oublions pas que  $n+1$  est impair). Par le

théorème des valeurs intermédiaires, on obtient bien l'existence de  $a_{n+1}$  tel que  $P_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ , et la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vérifiée.

6. Si  $n+1$  est pair, alors  $n$  est impair, et  $P_n(x) < 0$  pour  $x < a_n$  tandis que  $P_n(x) > 0$  pour  $x > a_n$ . On en déduit que  $P_{n+1}$  est décroissant de  $-\infty$  à  $a_n$ , puis croissant de  $a_n$  à  $+\infty$ . Or,

$$P_{n+1}(a_n) = P_n(a_n) + \frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0 + \frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mais  $a_n \neq 0$  (car  $P_n(0) = 1$ ), et  $n+1$  est pair donc  $a_n^{n+1} > 0$ . On en déduit que  $P_{n+1}(a_n) > 0$ , puis que  $P_{n+1}$  est toujours strictement positif sur  $\mathbb{R}$ , ce qui prouve la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  lorsque  $n+1$  est pair.

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. Il est clair que si  $P(X) = a$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $P$  est solution. Si  $P$  n'est pas constant, alors le polynôme  $Q(X) = P(X) - i$  n'est pas constant lui aussi. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il s'annule. En particulier, il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $P(z) = i$ , et donc on n'a pas  $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ . Ainsi, les polynômes solutions sont les polynômes constants, avec une constante réelle.

2. Les polynômes à coefficients réels sont bien entendu solutions. De plus, si  $x \in \mathbb{R}$ , alors puisque  $P(x) \in \mathbb{R}$ , on a

$$P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(x).$$

Ainsi, le polynôme  $P - \overline{P}$  admet une infinité de racine. Ce ne peut être que le polynôme nul. Mais les coefficients de  $P - \overline{P}$  sont  $(2i)$ -fois les parties imaginaires des coefficients de  $P$ . Ainsi, tous les coefficients de  $P$  ont une partie imaginaire nulle. C'est bien que  $P$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$ .

3. Il est clair que si  $P \in \mathbb{Q}[X]$ , alors  $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ . Réciproquement soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ . Soit  $d$  le degré de  $P$  et soit  $(L_0, \dots, L_d)$  la famille des polynômes de Lagrange associée aux entiers  $(0, \dots, d)$ . Alors la formule donnant ces polynômes nous dit qu'ils sont à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . De plus, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^d P(k) L_k(X).$$

$P$  est bien à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

### Correction de l'exercice 29 ▲

1. On commence par chercher les racines complexes pour factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis on regroupe les racines complexes conjuguées.

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{5i\pi/4})(X - e^{7i\pi/4}) \\ &= ((X - e^{i\pi/4})(X - e^{7i\pi/4}))((X - e^{3i\pi/4})(X - e^{5i\pi/4})) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1). \end{aligned}$$

Les deux polynômes de degré 2 que l'on obtient n'ont pas de racines réelles, ils sont donc irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

2. On commence par utiliser une identité remarquable, puis la réponse à la question précédente :

$$\begin{aligned} X^8 - 1 &= (X^4 - 1)(X^4 + 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1). \end{aligned}$$

3. On commence par factoriser le polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$  en remarquant qu'il s'agit alors d'une différence de deux carrés :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 - X + 1)^2 - i^2 = (X^2 - X + 1 - i)(X^2 - X + 1 + i).$$

On factorise alors chacun des polynômes de degré 2 dans  $\mathbb{C}$ , par exemple en calculant leur discriminant ou en remarquant que  $i$  (resp.  $-i$ ) sont des racines évidentes. On trouve :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X + i)(X - 1 - i)(X - i)(X - 1 + i).$$

En regroupant les termes conjugués, on trouve finalement :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2).$$

### Correction de l'exercice 30 ▲

1. On écrit simplement

$$X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X - 3)^2.$$

2. L'astuce(?) est d'écrire  $9 = -(3i)^2$ , et de reconnaître une différence de deux carrés. Donc on a :

$$\begin{aligned} X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9 &= (X(X - 3))^2 - (3i)^2 \\ &= (X(X - 3) - 3i)(X(X - 3) + 3i) \\ &= (X^2 - 3X - 3i)(X^2 - 3X + 3i). \end{aligned}$$

On factorise chacun de ces deux polynômes. Le discriminant du premier est  $9 + 12i = (\sqrt{3}(2 + i))^2$ . Ses racines sont  $\alpha_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$  et  $\alpha_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ . Le discriminant du second est  $9 - 12i = (\sqrt{3}(2 - i))^2$ , et ses racines sont  $\beta_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$  et  $\beta_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ . La décomposition de  $P$  en produit d'irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  est donc

$$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \beta_1)(X - \beta_2).$$

Pour obtenir la décomposition en produit d'irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ , on regroupe les racines complexes conjuguées, à savoir  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  d'une part et  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  d'autre part. On trouve

$$P = (X^2 - (2\sqrt{3} + 3)X + 3\sqrt{3} + 6)(X^2 + (2\sqrt{3} - 3)X - 3\sqrt{3} + 6).$$

### Correction de l'exercice 31 ▲

Si  $a$  est une racine commune de  $P$  et  $Q$ , alors  $X - a$  divise le pgcd de  $P$  et de  $Q$ . On commence donc par chercher ce pgcd, par exemple en appliquant l'algorithme d'Euclide. Ici, on a

$$\begin{aligned} X^3 - 9X^2 + 26X - 24 &= X^3 - 7X^2 + 7X + 15 + (-2X^2 + 19X - 39) \\ X^3 - 7X^2 + 7X + 15 &= (-2X^2 + 19X - 39)(-X/2 - 5/4) + (45X/4 - 135/4) \\ -2X^2 + 19X - 39 &= (45X/4 - 135/4)(-8X/45 + 52/45) \end{aligned}$$

Le pgcd de  $P$  et  $Q$  est donc  $45X/4 - 135/4$ , ou encore  $X - 3$ . On divise alors  $P$  et  $Q$  par  $X - 3$ , et on trouve :

$$P(X) = (X - 3)(X^2 - 6X + 8) \text{ et } Q(X) = (X - 3)(X^2 - 4X - 5).$$

On factorise encore chacun des polynômes de degré 2 pour trouver finalement :

$$P(X) = (X - 3)(X - 2)(X - 4) \text{ et } Q(X) = (X + 1)(X - 3)(X - 5).$$

On aurait aussi pu factoriser ces polynômes en cherchant des racines évidentes de chacun...

### Correction de l'exercice 32 ▲

On va commencer par décomposer  $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ , dont  $-1$  est racine évidente. On en déduit

$$Q(X) = (X + 1)(X^2 + 1) = (X + 1)(X - i)(X + i).$$

On a  $P(X) = Q(X^3)$  et il s'agit maintenant de trouver les racines 3-ièmes de  $-1$ ,  $i$  et  $-i$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X) &= (X + 1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X - e^{i\pi/2})(X - e^{-i5\pi/6})(X - e^{-i\pi/6}) \\ &\quad (X - e^{-i\pi/2})(X - e^{i5\pi/6})(X - e^{i\pi/6}). \end{aligned}$$



---

**Correction de l'exercice 33 ▲**

---

1. Les racines de ce polynôme sont les racines  $n$ -ièmes de l'unité. On en déduit que

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

2. On a  $(1 + X + \dots + X^{n-1})(X - 1) = X^n - 1$ . On en déduit que

$$1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

3. On va évaluer la factorisation précédente en 1. On trouve

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

Or,

$$1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2(-1)e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

On effectue le produit et on trouve :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) &= 2^{n-1} (-1)^{n-1} e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

4. La méthode est parfaitement similaire, mais cette fois on part de la factorisation de  $X^n - 1$  que l'on évalue en  $\exp(-2i\theta)$ . On trouve d'une part

$$e^{-2ni\theta} - 1 = (-2i)e^{-in\theta} \sin(n\theta)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \left( e^{-2i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) &= \prod_{k=0}^{n-1} (-2i) e^{\frac{ik\pi}{n} - \theta} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) \\ &= (-2i) e^{-in\theta} 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right). \end{aligned}$$

On conclut finalement que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}.$$

---

**Correction de l'exercice 34 ▲**

1. Notons  $P(x) = a_n x^n + \dots$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$  et cette limite vaut  $+\infty$  si  $a_n > 0$  et  $-\infty$  si  $a_n < 0$ . Si la limite est  $-\infty$ , alors on ne peut pas avoir  $P(x) \geq 0$  au voisinage de  $+\infty$  et donc  $a_n > 0$ . D'autre part, soit  $a$  une racine de  $P$  de multiplicité  $m$ . On sait que  $P(x) \sim_a \lambda(x-a)^m$ . Si  $m$  est impair, on en déduit que  $P$  s'annule en changeant de signe en  $a$ . Ceci contredit que  $P(x) \geq 0$  pour tout  $x$  proche de  $a$ . Ainsi, les racines de  $P$  sont de multiplicité paire.

2. On décompose  $P$  en produits de facteurs d'irréductibles : on a

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^s (X - a_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^t (X^2 + c_j X + d_j)^{q_j}$$

où les  $a_i$  sont les racines réelles de  $P$  (elles sont de multiplicité paire !), où les  $X^2 + c_j X + d_j$  sont des polynômes du second degré à discriminant négatif. Les racines de ces polynômes sont des nombres complexes conjugués  $\mu_j, \overline{\mu_j}$ . En particulier, on a

$$X^2 + c_j X + d_j = (X - \mu_j)(X - \overline{\mu_j}).$$

Posons donc

$$C(X) = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^s (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^t (X - \mu_j)^{q_j}.$$

On a bien  $P = C\overline{C}$ .

3. Décomposons  $C$  en partie réelle et en partie imaginaire :  $C(X) = A(X) + iB(X)$  avec  $A, B \in \mathbb{R}[X]$ . D'après la question précédente, on a  $P = C\overline{C} = A^2 + B^2$ .

### Correction de l'exercice 35 ▲

1. Soit  $P = a_n X^n + \dots + a_0$ , alors

$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = a_0 X^n + \dots + a_n.$$

Ainsi, si  $P$  est réciproque, on a bien  $X^n P(1/X) = P(X)$ . Réciproquement, si  $X^n P(1/X) = P(X)$ , alors on a nécessairement  $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}$ , etc... Donc  $P$  est réciproque.

2. Soient  $P$  et  $Q$  réciproques, de degrés respectifs  $n$  et  $m$ . Alors

$$X^n P(1/X) = P(X) \text{ et } X^m Q(1/X) = Q(X).$$

On en déduit que

$$X^{n+m}(PQ)(1/X) = X^n P(1/X) X^m Q(1/X) = P(X) Q(X) = (PQ)(X).$$

Ainsi, d'après la question précédente,  $PQ$  est réciproque.

3. Le raisonnement est complètement identique, en utilisant le quotient au lieu du produit !

4. Puisque  $P$  est réciproque,  $a_0 = a_n \neq 0$  et donc  $P(0) = a_0 \neq 0$ . D'autre part, si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors la relation  $P(\alpha) = \alpha^n P(\alpha^{-1})$  prouve que  $\alpha^{-1}$  est aussi racine de  $P$ . Dérivons la relation de la première question. On trouve, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$P'(x) = nx^{n-1}P(1/x) - x^{n-2}P'(1/x).$$

On évalue en 1, et on trouve

$$P'(1) = -P'(1)$$

et donc  $P'(1) = 0$ . On en déduit que 1 est racine au moins double. On utilise encore le résultat de la première question, et on remarque que  $P(-1) = -P(-1)$  puisque le degré de  $P$  est impair. Donc  $P(-1) = 0$ . On raisonne exactement comme deux questions plus haut.

5. Puisque  $P$  est réciproque,  $a_0 = a_n \neq 0$  et donc  $P(0) = a_0 \neq 0$ . D'autre part, si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors la relation  $P(\alpha) = \alpha^n P(\alpha^{-1})$  prouve que  $\alpha^{-1}$  est aussi racine de  $P$ .

6. Dérivons la relation de la première question. On trouve, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$P'(x) = nx^{n-1}P(1/x) - x^{n-2}P'(1/x).$$

On évalue en 1, et on trouve

$$P'(1) = -P'(1)$$

et donc  $P'(1) = 0$ . On en déduit que 1 est racine au moins double.

7. On utilise encore le résultat de la première question, et on remarque que  $P(-1) = -P(-1)$  puisque le degré de  $P$  est impair. Donc  $P(-1) = 0$ .

8. On raisonne exactement comme deux questions plus haut.

9. On va procéder par récurrence sur  $n$ , le cas  $n = 1$  étant trivial. Supposons donc que le résultat a été démontré pour tout polynôme réciproque de degré  $2n$ , et prouvons-le pour un polynôme réciproque  $P$  de degré  $2n + 2$ . Soit  $\alpha$  une racine de  $P$ . Alors, on sait que  $\alpha \neq 0$  et que  $\alpha^{-1}$  est aussi racine de  $P$ . Si  $\alpha \neq 1, -1$ ,  $\alpha^{-1} \neq \alpha$  et on peut factoriser  $P$  par  $(X - \alpha)(X - \alpha^{-1})$ . Or, il est facile de vérifier que  $(X - \alpha)(X - \alpha^{-1})$  s'écrit  $(X^2 + b_{n+1}X + 1)$ . D'autre part, si  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = -1$ , alors  $\alpha$  est racine de multiplicité au moins deux, et on peut factoriser par  $(X - \alpha)^2$ . Un tel polynôme s'écrit encore  $(X^2 + b_{n+1}X + 1)$ . Donc, dans tous les cas, en notant  $Q = X^2 + b_{n+1}X + 1$ , on a  $Q|P$  et  $P, Q$  réciproques. On en déduit que  $\frac{P}{Q}$  est réciproque, de degré  $2n$ , donc par l'hypothèse de récurrence s'écrit

$$\frac{P}{Q} = a_{2n+2}(X^2 + b_1X + 1) \dots (X^2 + b_nX + 1).$$

On remultiplie par  $Q$ , et on a bien prouvé que le résultat est vrai au rang  $n + 1$ . Si maintenant  $P$  est réciproque de degré impair  $2n + 1$ , alors  $-1$  est racine de  $P$  et  $P$  se factorise par le polynôme réciproque  $Q = X + 1$ . Donc  $\frac{P}{Q}$  est réciproque de degré pair  $2n$ , donc s'écrit  $a_{2n+1}(X^2 + b_1X + 1) \dots (X^2 + b_nX + 1)$ . Ainsi, tout polynôme réciproque de degré impair  $2n + 1$  se factorise en

$$P = a_{2n+1}(X + 1)(X^2 + b_1X + 1) \dots (X^2 + b_nX + 1).$$

---