Chapitre : Trigonométrie

1 Valeurs des fonctions trigonométriques

Exercice 1 **Valeurs exactes** –

Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes :

$$\cos\left(\frac{538\pi}{3}\right),\ \sin\left(\frac{123\pi}{6}\right),\ \tan\left(-\frac{77\pi}{4}\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [3045]

Exercice 2 **Valeur de** $\cos(\pi/12)$ **et** $\sin(\pi/12)$**.** –

Déterminer la valeur de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Indication ▼ Correction ▼ [2292]

Exercice 3 **Tangente en $\pi/8$ –**

Calculer $\tan(\pi/8)$.

Indication ▼ Correction ▼ [3073]

Exercice 4 **Cosinus –**

Soit $x \in]-\pi,\pi[+2\pi\mathbb{Z}$. On pose $t = \tan(x/2)$. Démontrer les formules suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [3074]

Exercice 5 **Inégalité sur les sinus** –

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

Indication ▼ Correction ▼ [3076]

2 Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 6 **Équations trigonométriques - lecture du cercle trigonométrique** –

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ **2.** $\tan x = \sqrt{3}$ **3.** $\cos x = -1$

4. $\sin(3x) = 1$ **5.** $\cos(4x) = -2$

Indication ▼ Correction ▼ [2518]

Exercice 7 **Équations trigonométriques simples** –

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ **2.** $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x)$
3. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(2x)$

Indication ▼ Correction ▼ [3077]

Exercice 8 **Équations trigonométriques - après formule de trigonométrie** –

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
3. $\cos(3x) = \sin(x)$
4. $\tan x = 2\sin x$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 9 ★★ **Équations trigonométriques plus difficiles** –

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos x = \sqrt{3}\sin(x) + 1$ **2.** $\cos x + \sin x = 1 + \tan x$.

Indication ▼ Correction ▼ [3078]

Exercice 10 **Equation du second degré** –

Déterminer les réels x vérifiant $2\cos^2(x)+9\cos(x)+4=0$.

Indication ▼ Correction ▼ [3044]

Exercice 11 **Inéquations trigonométriques –**

Résoudre sur $[0,2\pi]$, puis sur $[-\pi,\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sin(x) \geq 1/2$ **2**. $\cos(x) \geq 1/2$

Indication ▼ Correction ▼ [2923]

Exercice 12 **Un système –**

Déterminer l'ensemble des couples (x,y) vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 2\cos(x)+3\sin(y) &= \sqrt{2}-\frac{3}{2} \\ 4\cos(x)+\sin(y) &= 2\sqrt{2}-\frac{1}{2} \\ x\in[-\pi;\pi],\ y\in[-\pi;\pi] & \end{cases}$$

Indication ▼ Correction ▼ [2925]

Exercice 13 **Inéquations trigonométriques –**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\tan x \geq 1$ **2.** $\cos(x/3) \leq \sin(x/3)$
3. $2\sin^2 x \leq 1$ **4.** $\cos^2 x \geq \cos 2x$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 14 **Équation trigonométrique** –

Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 15 **Trinôme du second degré ? –**

Résoudre dans $[0,2\pi]$ l'équation $\cos(2x)+\cos(x)=0$.

Indication ▼ Correction ▼ [2277]

Exercice 16 **Inéquation plus subtile qu'il n'y parait –**

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan(x) \geq 2\sin(x)$.

Indication ▼ Correction ▼ [2924]

Exercice 17 **Du cosinus à l'angle** –

On cherche à déterminer tous les réels t tels que

$$\cos t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0, \pi/4[$. Dans la suite, on notera cette solution t_0.
2. Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
3. En déduire t_0.
4. Résoudre l'équation.

Indication ▼ Correction ▼ [56]

3 Fonctions trigonométriques

Exercice 18 **Avec un déphasage** –

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

1. Déterminer une période T de f.
2. Déterminer en quels points f atteint son maximum, son minimum, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-T, T]$.
4. f est-elle paire ? impaire ?

Indication ▼ Correction ▼ [3047]

Exercice 19 **Domaine** –

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$. Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Indication ▼ Correction ▼ [2887]

Exercice 20 **Périodique... –**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x)\cos^3 x.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?

2. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$, et on déduire le sens de variation de f sur I.

3. Tracer la courbe représentative de f.

Indication ▼ Correction ▼ [560]

Exercice 21 **Quotient de sinus** –

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Vérifier que f est 2π-périodique.
2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que dire sur Γ ?
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis déterminer la limite de f en $-\pi/2$.
4. Construire Γ à l'aide des renseignements précédents.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 22 **Étude d'une fonction trigonométrique** –

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ? En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$ pour construire toute la courbe représentative de f.

3. Montrer que, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}.$$

4. Étudier le signe de $1+2\cos x$ sur $[0,\pi]$.

5. Établir le tableau de variations de f sur $[0,\pi]$.

6. Tracer la courbe représentative de f.

Indication ▼ Correction ▼ [2918]

Exercice 23 ★★★ **Périodicité** –

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$. On veut démontrer que f est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose que $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$. Démontrer que f est périodique.
2. On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Résoudre l'équation $f(x) = 2$. En déduire que f n'est pas périodique.

Indication ▼ Correction ▼ [3048]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Utiliser la périodicité des fonctions trigonométriques. Effectuer par exemple la division euclidienne de 538 par 3, ou par 6.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Utiliser des formules de trigonométrie pour utiliser la valeur de $\cos(\pi/6)$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Utiliser les formules de duplication, en remarquant que $2\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Indication pour l'exercice 5 ▲

Raisonner par récurrence sur n, et utiliser la formule de trigonométrie $\sin(a+b) = \ldots$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Chercher d'abord les solutions dans $[0, 2\pi[$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Utiliser les résultats du cours ! Pour la dernière question, tenir compte de l'ensemble de définition de la fonction tangente !

Indication pour l'exercice 8 ▲

En utilisant des formules de trigonométrie, il faut se ramener à des équations du type $\cos a = \cos b$ ou $\sin a = \sin b$, et utiliser des résultats du cours.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Indication pour l'exercice 10 ▲

On pourra poser $X = \cos(x)$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Indication pour l'exercice 12 ▲

Poser $X = \cos x$ et $Y = \sin y$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

S'aider du cercle trigonométrique. On pourra poser, pour la question 3., $u = x/3$, et utiliser des formules de trigonométrie pour la question 4.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Mettre $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$ en facteur.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Attention ! On ne peut pas simplifier par $\sin x$.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. $\cos(0) > \cos(t_0) > \cos(\pi/4)$.
2. Formule de trigo.
3. Transformer l'équation en $\cos(a) = \cos(b)$, et utiliser le fait que $t_0 \in]0, \pi/4[$.
4. C'est du cours !

Indication pour l'exercice 18 ▲

1.
2.
3.
4.

Indication pour l'exercice 19 ▲

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Montrer qu'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, \pi/2]$.
2. Utiliser une formule d'addition.
3.

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Il faut résoudre $\sin(x) = -1$.
2.
3. Considérer les fonctions $x \sin x$ et $x \mapsto \frac{x}{x+1}$.
4.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Utiliser que $-1 \leq \cos x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Utiliser d'abord une symétrie par rapport à O puis des translations.
3. Formule de la dérivabilité d'un quotient.
4. S'aider du cercle trigonométrique.
5.
6.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Chercher une période de f sous la forme d'un multiple de 2π.
2. Pour que $f(x) = 2$, il faut à la fois que $\cos(x) = 1$ et que $\cos(\alpha x) = 1$.

Correction de l'exercice 1 ▲

On sait que $538 = 179 \times 3 + 1$ et donc

$$\cos\left(\frac{538\pi}{3}\right) = \cos\left(179\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

De même, on a $123 = 20 \times 6 + 3$ et donc

$$\sin\left(\frac{123\pi}{6}\right) = \sin\left(20\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

De même, on a $77 = 19 \times 4 + 1$ et donc

$$\tan\left(-\frac{77\pi}{4}\right) = \tan\left(-19\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

D'après la formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on a

$$2\cos^2(\pi/12) = \cos(\pi/6) + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

Puisque $\cos(\pi/12) > 0$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}.$$

On en déduit que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Puisque $\sin(\pi/12) > 0$, on a donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Une autre possibilité pour résoudre cet exercice était de remarquer que

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

et d'appliquer les formules d'addition $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

On remarque que $2\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$\begin{aligned}\tan(\pi/4) &= \frac{\tan(\pi/8) + \tan(\pi/8)}{1 - \tan^2(\pi/8)} \\ &= \frac{2\tan(\pi/8)}{1 - \tan^2(\pi/8)}.\end{aligned}$$

Puisque $\tan(\pi/4) = 1$, $\tan(\pi/8)$ est solution de l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$. Les deux solutions de cette équation sont

$$x_0 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2},\ x_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2}.$$

Comme on sait que $\tan(\pi/8) > 0$ puisque $\pi/8 \in]0, \pi/2[$, on en déduit que

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Bien sûr, on peut déduire la troisième formule des deux autres. La plus facile est la troisième, car d'après la formule de duplication de tan :

$$\tan(x) = \tan\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left(2\frac{x}{2}\right)\\ &= 2\sin(x/2)\cos(x/2)\\ &= 2\tan(x/2)\cos^2(x/2).\end{aligned}$$

Puisque de plus

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1+\tan^2(x/2)}$$

on obtient le résultat.

Correction de l'exercice 5 ▲

On va démontrer le résultat par récurrence sur n. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et pour $n \geq 1$, on note P_n : "$|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$". Initialisation : la propriété est clairement vraie pour $n = 1$. Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que P_n est vraie et prouvons P_{n+1}. Alors on a

$$\sin((n+1)x) = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, puis $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\cos(nx)| \leq 1$, on trouve

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)x)| &\leq |\sin(nx)| \cdot |\cos(x)| + |\sin(x)| \cdot |\cos(nx)|\\ &\leq |\sin(nx)| \cdot 1 + |\sin(x)| \cdot 1\\ &\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)|\\ &\leq (n+1)|\sin(x)|\end{aligned}$$

où l'avant-dernière ligne vient de l'hypothèse de récurrence. Donc P_{n+1} est vraie. Conclusion : La propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Les seules solutions de l'équation dans $[0, 2\pi[$ sont $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$. Par 2π-périodicité, on obtient que les solutions sont les réels $\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et les réels $5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une autre façon de rédiger est d'écrire que

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

2. On a $\sqrt{3} = \tan(\pi/3)$ et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ (attention ! ici les solutions sont définies simplement à π près et non à 2π près).

3. Il n'y a qu'une solution à l'équation dans $[0, 2\pi[$, donnée par $x = \pi$. Les solutions de l'équation sont donc les réels $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. On écrit

$$\sin(3x) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

5. L'équation n'admet pas de solutions ! En effet, cos est à valeurs dans $[-1, 1]$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On écrit simplement que

$$\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) \iff 5x = \frac{2\pi}{3} + x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 5x = \pi - \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

En résolvant individuellement chaque équation, on trouve que

$$\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) \iff x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. On sait que

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x) \iff x + \frac{\pi}{4} = 2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} = -2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

En résolvant individuellement chacune de ces deux équations, on trouve que l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3. On remarque d'abord que l'équation a un sens pour $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et pour $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Il faut donc chercher les solutions dans

$$E = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

Pour $x \in E$, on écrit alors

$$\begin{aligned}\tan(2x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &\iff 2x = x + \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Mais $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ n'est jamais dans E. Ainsi, cette équation n'admet aucune solution.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On se ramène à une équation simple en remarquant que $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$. L'équation est donc équivalente à $\sin(2x) = \frac{1}{2}$. Mais,

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \tfrac{1}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x = \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \tfrac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \tfrac{5\pi}{12} + k\pi.\end{aligned}$$

2. On transforme d'abord l'équation par une formule de trigonométrie :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right).$$

En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, on trouve :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \iff x = \frac{5\pi}{14} + \frac{6k\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \frac{6k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. C'est exactement la même méthode. On trouve que

$$\cos(3x) = \sin x \iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. On remarque d'abord que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si tel est le cas, alors

$$\tan x = 2\sin x \iff 2\sin x \cos x = \sin x \iff \sin(2x) = \sin x.$$

Or,

$$\sin(2x) = \sin x \iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

On vérifie (par exemple, sur le cercle trigonométrique), qu'aucune des solutions ne s'écrit $\frac{\pi}{2}+l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$ et on conclut finalement que :

$$\tan x = 2\sin x \iff x = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Pour ce type d'équations, la méthode est toujours la même. On commence par la transformer en

$$\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1.$$

On factorise ensuite par $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$. L'équation est équivalente à

$$\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)=\frac{1}{2}.$$

On remarque ensuite que $\cos(\pi/3)=1/2$ et $\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$. L'équation s'écrit donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)=\frac{1}{2}.$$

D'après une formule de trigonométrie, elle est encore équivalente à

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Les solutions de cette équation sont les réels x pour lesquels

$$\frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } \frac{\pi}{3}+x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{2k\pi :\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi :\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2. Remarquons pour commencer que l'équation a un sens pour les x tels que $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. Pour ces x, elle est équivalente à

$$\begin{aligned}
\cos x+\sin x=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x} &\iff (\cos x-1)(\cos x+\sin x)=0\\
&\iff \cos x=1 \text{ ou } \cos(x)+\sin(x)=0\\
&\iff x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } \cos(x)=-\sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\
&\iff x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{2}-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
&\iff x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

On vérifie qu'aucune de ces solutions ne correspond à une valeur interdite pour laquelle l'équation n'a pas de sens.

Correction de l'exercice 10 ▲

On pose $X=\cos(x)$, et l'équation devient $2X^2+9X+4=0$. Son discriminant est $\Delta=49=7^2$, et ses racines sont $X_1=-4$ et $X_2=-1/2$. L'équation $\cos(x)=-4$ n'a aucune solution. Les solutions de l'équation $\cos(x)=-1/2$ sont les réels qui s'écrivent $\frac{4\pi}{3}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, et $\frac{-4\pi}{3}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Finalement l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{4\pi}{3}+k2\pi :\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-4\pi}{3}+k2\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Il faut s'aider du cercle trigonométrique !

1. Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\sin(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a le même résultat :

$$\sin(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

Finalement, par 2π-périodicité, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x) \geq 1/2 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right].$$

2. Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\cos(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right].$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\cos(x) \geq 1/2 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

On conclut de la même façon par 2π-périodicité, mais on utilise plutôt la deuxième expression qui est plus facile. Finalement, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) \geq 1/2 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Posons $X = \cos(x)$ et $Y = \sin(y)$. Alors le couple (X, Y) est solution du système

$$\begin{cases} 2X + 3Y &= \sqrt{2} - \frac{3}{2} \\ 4X + Y &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On résout ce système en remarquant que

$$Y - 2 \times 3Y = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - 2 \times \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)$$

ce qui donne encore

$$-5Y = \frac{5}{2} \iff Y = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit ensuite que $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $\sin(y) = -\frac{1}{2}$ ce qui entraîne que $y = -\pi/6$ ou $y = -5\pi/6$, puis $\cos x = \sqrt{2}/2$, ce qui entraîne $x = \pi/4$ ou $x = -\pi/4$. Finalement, on trouve 4 couples de solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right); \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}\right); \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right); \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}\right)\right\}.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. On travaille cette fois sur un intervalle de longueur π. Puisque $\tan(\pi/4) = 1$, on en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[.$$

2. On va d'abord poser $u = x/3$. Alors,

$$\cos(x/3) \leq \sin(x/3) \iff \cos(u) \leq \sin(u) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ u \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

Revenant à $x = 3u$, il vient

$$\cos(x/3) \leq \sin(x/3) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 6k\pi, \frac{15\pi}{4} + 6k\pi\right].$$

On en déduit que

$$\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + 6k\pi, \frac{15\pi}{4} + 6k\pi\right].$$

3. On commence par utiliser la formule de trigonométrie $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. L'équation est donc équivalente à $\cos(2x) \geq 0$. Posons $u = 2x$. Alors $\cos(u) \geq 0$ est équivalent à $u \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est donné par

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right].$$

4. On a

$$\cos^2 x \geq \cos 2x \iff \cos^2 x \geq 2\cos^2 x - 1 \iff \cos^2 x \leq 1.$$

Cette dernière inégalité étant toujours vérifiée, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2 x \geq \cos 2x.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

C'est une méthode classique. On met en facteur $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, de sorte que

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\big(\cos(\pi/6)\cos x - \sin(\pi/6)\sin x\big) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

L'équation est donc équivalente à

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2}.$$

Elle admet donc des solutions si et seulement si $m \in [-2, 2]$. Si $m = \sqrt{2}$, alors on a

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et donc l'équation est équivalente à

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0.$$

Posons $y = \cos x$ et déterminons les solutions de l'équation $2y^2 + y - 1 = 0$. Calculant le discriminant, on voit que les solutions de cette équation sont $y = -1$ et $y = 1/2$. On en déduit donc que $\cos(2x) + \cos(x) = 0$ si et seulement si $\cos(x) = -1$ ou $\cos(x) = 1/2$. Puisque l'on cherche les solutions uniquement dans $[0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions est $\{\pi, \pi/3, 5\pi/3\}$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Pour ne pas se tromper en simplifiant par $\sin x$, on passe tout à gauche et on factorise :

$$\tan(x) - 2\sin(x) = \sin(x)\left(\frac{1}{\cos x} - 2\right) = \sin(x)\frac{1-2\cos x}{\cos x}.$$

On conclut par un tableau de signes.

On trouve donc que l'ensemble des solutions est

$$\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{3}; 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \{\pi\}.$$

Remarquons qu'on aurait pu simplement étudier le signe de $\sin(x)\frac{1-2\cos x}{\cos x}$ sur $[0,\pi]$ puis conclure par imparité de cette fonction.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Il est clair que $1 = \cos(0) > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et on vérifie aussi facilement que $\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (par exemple, à la calculatrice, ou parce que

$$(2\sqrt{2})^2 = 8 < (1+\sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5}).$$

Puisque la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi/4[$, il existe un unique t_0 dans $]0, \pi/4[$ tel que $\cos(t_0) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2. On a

$$\cos(2t_0) = 2\cos^2(t_0) - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

De même,

$$\cos(4t_0) = 2\cos^2(2t_0) - 1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = -\cos(t_0).$$

3. L'équation $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$ est équivalente à $\cos(4t_0) = \cos(\pi - t_0)$, dont les solutions vérifient

$$4t_0 = \pi - t_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 4t_0 = t_0 - \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mais puisque $\pi - t_0 \in]3\pi/4, \pi[$ et $4t_0 \in]0, \pi[$, la première équation n'est possible que pour $k = 0$ et on trouve $t_0 = \pi/5$. Et comme $t_0 - \pi \in]-\pi, -3\pi/4[$, on ne peut jamais avoir $t_0 - \pi + 2k\pi \in]0, \pi[$. On en déduit que $t_0 = \frac{\pi}{5}$.

4. Par le résultat du cours, les solutions de $\cos t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ sont les réels $t = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $t = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Soit T un nombre réel. On a

$$f(x+T) = \cos\left(\frac{3}{2}(x+T) - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4} + \frac{3T}{2}\right).$$

On a $f(x+T) = f(x)$ par exemple si $3T/2 = 2\pi$, donc si $T = 4\pi/3$. La fonction f est donc $4\pi/3$ périodique.

2. On a

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

La fonction f atteint donc son maximum en les points $\frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. De même, on a

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

La fonction f atteint donc son minimum en les points $\frac{4k\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$. Finalement, on a aussi

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont donc les réels $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. On peut représenter f en s'inspirant de la courbe représentative de la fonction cosinus, et en utilisant les résultats de la question précédente, qu'on peut compléter par exemple avec $f(0)=\cos(-\pi/4)=\sqrt{2}/2$. On trouve :

4. Puisque $f(0)\neq 0$, la fonction f n'est pas impaire. De plus, $f(\pi/2)=0$ alors que $f(-\pi/2)=\cos(-\pi)=-1\neq f(\pi/2)$. La fonction f n'est pas paire !

Correction de l'exercice 19 ▲

On sait que $\ln(u)$ est défini uniquement si $u>0$. Donc $\ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$ est défini uniquement si $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|$ est strictement positif. La valeur absolue d'un réel étant toujours positive ou nulle, la fonction f est bien définie pour les réels x tels que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\neq 0.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0 &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{2}x=k\pi \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x=2k. \end{aligned}$$

La fonction f est donc bien définie pour tous les réels, sauf les entiers pairs : $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash 2\mathbb{Z}$. Pour déterminer la parité de f, remarquons déjà que son domaine de définition est symétrique par rapport à 0, et donc que si $x\in\mathscr{D}_f$, alors $-x\in\mathscr{D}_f$. Soit donc $x\in\mathscr{D}_f$. Alors

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right) \text{ (car la fonction sin est impaire)} \\ &= \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right) \text{ (car la fonction } |\cdot| \text{ est paire)} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est paire. De plus, on a

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+2)\right)\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\sin(t+\pi)=-\sin t$ et que $|-a|=|a|$. Ainsi, f est périodique de période 2.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On a

$$f(-x)=\cos(-3x)(\cos^3(-x))=\cos(3x)\cos^3(x)=f(x).$$

La fonction f est paire, on peut se contenter de l'étudier sur $[0,+\infty[$. De plus,

$$f(x+\pi)=\cos(3x+3\pi)\cos^3(x+\pi)=-\cos(3x)(-\cos x)^3=f(x).$$

f est donc π-périodique. Finalement, on peut se contenter d'étudier f sur l'intervalle $I=[0,\pi/2]$. On obtiendra aussi la courbe de f sur $[-\pi/2,\pi/2]$ par parité. Cet intervalle est de longueur π et la fonction est π-périodique. On va donc déduire le reste de la courbe par des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. f est dérivable sur I et pour tout $x\in I$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3\sin(3x)\cos^3(x)-3\cos(3x)\sin(x)\cos^2(x)\\ &= -3\cos^2(x)\big(\sin(3x)\cos(x)+\sin(x)\cos(3x)\big)\\ &= -3\cos^2(x)\sin(4x). \end{aligned}$$

Puisque $\cos^2(x)\geq 0$, f' est bien du signe de $-\sin(4x)$ sur l'intervalle $[0,\pi/2]$. En particulier,
si $x\in[0,\pi/4]$, $f'(x)\leq 0$ et f est décroissante ; si $x\in[\pi/4,\pi/2]$, $f'(x)\geq 0$ et f est croissante.

3. si $x\in[0,\pi/4]$, $f'(x)\leq 0$ et f est décroissante ;

4. si $x\in[\pi/4,\pi/2]$, $f'(x)\geq 0$ et f est croissante.

5. On obtient le dessin suivant :

Correction de l'exercice 21 ▲

1. $f(x)$ est défini partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les x avec $\sin x\neq -1$. Le domaine de définition de f est donc

$$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

De plus, la 2π-périodicité de sin entraîne facilement la 2π-périodicité de f.

2. De $\sin(\pi-x)=\sin x$, on déduit que $f(\pi-x)=f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x=\pi/2$ est un axe de symétrie de Γ.

3. Posons $g(x)=\frac{x}{x+1}$ et $h(x)=\sin x$. On a $f=g\circ h$. De plus, h est croissante sur l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2]$ dont l'image est $]-1,1]$. La fonction g est elle croissante sur l'intervalle $]-1,1]$ (par exemple, on peut écrire $g(x)=1-\frac{1}{x+1}$. Par composition, f est croissante sur $]-\pi/2,\pi/2]$. On a $\sin(x)\to -1^+$ lorsque x tend vers $-\pi/2$ et $\lim_{x\to -1^+}g(x)=-\infty$. Ainsi, par composition de limites, f tend vers $-\infty$ en $-\pi/2$.

4. On construit d'abord γ sur $]-\pi/2,\pi/2]$. On la déduit sur $]-\pi/2,3\pi/2]$ par symétrie d'axe $x=\pi/2$. Enfin, on l'obtient sur $\mathbb{R}$ par périodicité de période 2π, et donc par des translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$. On obtient :

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Puisque $\cos x\geq -1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $2+\cos x>0$. Le dénominateur ne s'annule pas, et f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On a

$$f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$$

puisque sin et cos sont 2π-périodiques. De plus, on a

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{2+\cos x}=-f(x).$$

La fonction f est donc impaire. La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à l'origine du repère. De plus, par 2π-périodicité, on peut limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π puis déduire la courbe représentative de f par des translations de vecteur $(2\pi,0)$. Il suffit donc d'étudier la fonction sur $[0,\pi]$, construire la courbe sur cet intervalle, l'obtenir sur $[-\pi,\pi]$ par symétrie par rapport à O, puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

3. En utilisant la formule de dérivabilité d'un quotient, on a

$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)-(-\sin x)(\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}.$$

4. On a $1+2\cos x \geq 0 \iff \cos x \geq -1/2$. En s'aidant du cercle trigonométrique, on trouve que $\cos x \geq -1/2$ sur $[0, 2\pi/3]$ et $\cos x \leq -1/2$ sur $[2\pi/3, \pi]$.

5. On en déduit le tableau de variations suivant :

6. On trouve la courbe suivante :

Correction de l'exercice 23 ▲

1. On remarque que

$$\begin{aligned} f(x+2\pi q) &= \cos(x+2\pi q) + \cos\left(\frac{p}{q}x + 2\pi p\right) \\ &= \cos(x) + \cos\left(\frac{p}{q}x\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, f est $2\pi q$-périodique.

2. Puisque cos est à valeurs dans $[-1,1]$, pour que $f(x) = 2$, il est nécessaire et suffisant que $\cos(x) = 1$ et $\cos(\alpha x) = 1$. Les solutions de $\cos(x) = 1$ sont les réels de la forme $2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus,

$$\cos(\alpha x) = 1 \iff \exists \ell \in \mathbb{Z},\ \alpha x = 2\ell\pi \iff \exists \ell \in \mathbb{Z},\ x = 2\ell\pi/\alpha.$$

Si $x \neq 0$ est solution de l'équation $f(x) = 2$, il existe donc deux entiers relatifs k et ℓ non-nuls tels que $x = 2k\pi = 2\ell\pi/\alpha$. En particulier, $\alpha = \ell/k$ est un nombre rationnel, ce qui n'est pas le cas. Donc la seule solution de $f(x) = 2$ est 0. Ceci empêche f d'être périodique, car si f était périodique de période T, on aurait aussi $f(T) = 2$.