Chapitre : Exercices de compléments d'algèbre linéaire

1 Sommes directes de plusieurs sous-espaces

Exercice 1 ★★ **Par deux –**

Soit $E=\mathbb{R}^4$. On considère (u_1,u_2,u_3,u_4) une famille libre de E et on pose

$$F=\mathrm{vect}(u_1+u_2,u_3),\ G=\mathrm{vect}(u_1+u_3,u_4),\ H=\mathrm{vect}(u_1+u_4,u_2).$$

Démontrer que $F\cap G=\{0\}$, que $F\cap H=\{0\}$ et que $G\cap H=\{0\}$. La somme $F+G+H$ est-elle directe ?

Indication ▼ Correction ▼ [836]

Exercice 2 ★★ **Somme directe ou non de trois sous-espaces –**

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4). Soit

$$E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ 2x+y+z-t=0 \text{ et } x+y+z=0\}$$

et $F=\mathrm{vect}(v)$ où $v=e_1+e_3$.

1. On pose $G_1=\mathrm{vect}(w_1)$ où $w_1=e_1+e_2$. La somme directe $E+F+G_1$ est-elle directe ? Préciser la dimension de $E+F+G_1$.
2. On pose $G_2=\mathrm{vect}(w_2)$ où $w_2=e_1+e_2+e_3$. La somme directe $E+F+G_2$ est-elle directe ? Préciser la dimension de $E+F+G_2$.

Indication ▼ Correction ▼ [3056]

Exercice 3 ★★★ **Caractérisation de la somme directe de 3 sous-espaces vectoriels –**

Soient E un espace vectoriel et F,G,H trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que F, G et H sont en somme directe si et seulement si $(F\cap G=\{0\}$ et $(F+G)\cap H=\{0\})$.

Indication ▼ Correction ▼ [835]

2 Applications linéaires définies sur une somme directe

Exercice 4 ★★★★★ **Factorisation et inclusion de noyaux –**

Dans cet exercice, on admet que dans tout espace vectoriel, un sous-espace admet un supplémentaire. Soient E,F deux espaces vectoriels et $u,v\in\mathscr{L}(E,F)$. Montrer que

$$\ker(u)\subset\ker(v)\iff \exists f\in\mathscr{L}(F) \text{ tel que } v=f\circ u.$$

Indication ▼ Correction ▼ [847]

Exercice 5 ★★★★★ **Factorisation et inclusion des images –**

Dans cet exercice, on suppose connue la propriété suivante : si E_1 est un espace vectoriel et F_1 est un sous-espace vectoriel de E_1, alors il possède un supplémentaire. Soient alors E,F,G trois espaces vectoriels, $u\in\mathscr{L}(F,G)$ et $v\in\mathscr{L}(E,G)$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Im}(v)\subset\mathrm{Im}(u)$;
2. Il existe $w\in\mathscr{L}(E,F)$ tel que $v=u\circ w$.

Indication ▼ Correction ▼ [848]

3 Matrices par blocs

Exercice 6 ★ **Matrice triangulaire par blocs inversible –**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in GL_m(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et T la matrice triangulaire par blocs donnée par

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Justifier que T est inversible et donner son inverse.

Indication ▼ Correction ▼ [3242]

Exercice 7 ★ **Trace du produit tensoriel de deux matrices –**

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on définit le produit tensoriel de A et B par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

Quelle est la taille de la matrice $A \otimes B$? Démontrer que $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Indication ▼ Correction ▼ [2666]

Exercice 8 ★★ **Déterminant d'une matrice par blocs et complément de Schur –**

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice triangulaire supérieure par blocs N telle que

$$MN = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & S \end{pmatrix}$$

où $S = D - CA^{-1}B$.

2. En déduire que

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Indication ▼ Correction ▼ [3240]

Exercice 9 ★★★ **Rang d'une matrice triangulaire par blocs –**

Soit $A \in GL_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ et $M \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{R})$ la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(C)$.

Indication ▼ Correction ▼ [3241]

Exercice 10 ★★★★ **Rang par blocs –**

Soit B la matrice diagonale par blocs

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de B en fonction du rang des A_i.

Indication ▼ Correction ▼ [942]

Exercice 11 ★★ **Matrice de rang** r –

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r.

1. Démontrer que A est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.

2. On suppose de plus que $\mathrm{Im}(A)$ et $\ker(A)$ sont supplémentaires. Démontrer que l'on peut demander $C = 0$. Que dire de B ?

Indication ▼ Correction ▼ [3120]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Trouver un vecteur qui admet deux décompositions différentes dans $F+G+H$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Si $\mathscr{B}_E$ est une base de E, $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\mathscr{B}_G$ est une base de G, la somme $E+F+G$ est directe si et seulement si $\mathscr{B}_E \cup \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est une famille libre.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Indication pour l'exercice 4 ▲

Un sens est facile. Pour la réciproque, on pourra regarder comment définir f sur $\mathrm{Im}(u)$. On prouvera que cette définition a bien un sens, et puis on la complètera sur un supplémentaire.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Prendre $x \in E$ et réfléchir à quoi doit être égal $w(x)$... à un y tel que $u(y) = v(x)$!

Indication pour l'exercice 6 ▲

Indication pour l'exercice 7 ▲

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Chercher N sous la forme $\begin{pmatrix} I_p & E \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$.
2. On se ramène à des calculs de déterminants de matrices triangulaires par blocs.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Déterminer la dimension de son noyau.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Calculer la dimension du noyau !

Indication pour l'exercice 11 ▲

1.
2.

Correction de l'exercice 1 ▲

On va simplement démontrer que $F\cap G=\{0\}$, les deux autres égalités se prouvant de façon tout à fait similaire. Soit $u\in F\cap G$. Alors il existe des scalaires a,b,c,d tels que

$$u=a(u_1+u_2)+bu_3=c(u_1+u_3)+du_4 \implies (a-c)u_1+au_2+(b-c)u_3-du_4=0.$$

La famille (u_1,u_2,u_3,u_4) étant libre, on en déduit que

$$a-c=a=b-c=-d=0,$$

d'où l'on déduit successivement $a=d=0$, puis $c=0$, $b=0$. Ainsi, $u=0$. On va prouver que la somme $F+G+H$ n'est pas directe en trouvant un vecteur qui admet deux décompositions différentes dans $F+G+H$. Par exemple,

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & -u_3+(u_1+u_3)+0\in F+G+H\\ & = & (u_1+u_2)+0+(-u_2)\in F+G+H. \end{array}$$

La somme n'est pas directe !

Correction de l'exercice 2 ▲

On va utiliser le résultat suivant : si $\mathscr{B}_E$ est une base de E, $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\mathscr{B}_G$ est une base de G, la somme $E+F+G$ est directe si et seulement si $\mathscr{B}_E\cup\mathscr{B}_F\cup\mathscr{B}_G$ est une famille libre. Ceci nous incite à chercher une base de E. Pour cela, on remarque que

$$(x,y,z,t)\in E \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y-z\\ y & = & y\\ z & = & z\\ t & = & -y-z. \end{array}\right.$$

Ainsi, si on pose $u_1=(-1,1,0,-1)$ et $u_2=(-1,0,1,-1)$, la famille (u_1,u_2) est une base de E.

1. Voyons si la famille (v,w_1,u_1,u_2) est une famille libre. Pour cela, on résout le système $av+bw_1+cu_2+du_2=0$, d'inconnues a,b,c,d. La résolution de ce système, en utilisant la matrice augmentée, donne

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) &\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\\
&\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\\
&\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

La famille est donc liée. La somme n'est pas directe ! De plus, on vérifie que (v,w_1,u_1) est libre, en reproduisant le calcul précédent (sauf la dernière ligne). C'est bien que (v,w_1,u_1) est une base de $E+F+G_1$ qui est de dimension 3.

2. On reprend la même méthode, mais en remplaçant w_1 par w_2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

La famille est libre : E, F et G_2 sont en somme directe, et la dimension de $E+F+G_2$ est égale à 4.

Correction de l'exercice 3 ▲

Prouvons d'abord le sens direct. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = x+0+0 = 0+x+0$ donne deux décompositions de x dans la somme $F+G+H$ et donc $x=0$. Choisissons ensuite $x \in (F+G)\cap H$. Alors $x = y+z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On en déduit que $x = y+z+0 = 0+0+x$ admet deux décompositions dans la somme $F+G+H$ qui est directe, donc ces deux décompositions coïncident et $x=0$. Prouvons maintenant la réciproque. Soit $(x,y,z) \in F \times G \times H$ tel que $x+y+z=0$.

Alors $x+y = -z \in (F+G)\cap H = \{0\}$ donc $z=0$ et $x+y=0$. Or F et G sont en somme directe donc $x=y=0$ et donc finalement $x=y=z=0$. Ainsi, F, G et H sont en somme directe.

Correction de l'exercice 4 ▲

Une inclusion est immédiate : si $v = f\circ u$, et $x \in \ker(u)$, avec $v(x) = f(u(x)) = f(0) = 0$ et donc $\ker(u) \subset \ker(v)$. Réciproquement, supposons que $\ker(u) \subset \ker(v)$. Prenons $y \in \mathrm{Im(u)}$. Alors $y = u(x)$ pour un x dans E. Nécessairement, on a $v(x) = f(u(x)) = f(y)$ et donc f doit être définie sur $\mathrm{Im}(u)$ par $f(y) = v(x)$ pour $y = u(x)$. On considère donc un supplémentaire S de $\mathrm{Im}(u)$ dans F et on définit f sur la somme directe $\mathrm{Im}(u)\oplus S$ par

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(y) & = & 0 & \text{si } y \in S \\ f(y) & = & v(x) & \text{si } y \in \mathrm{Im}(u) \text{ et } y = u(x). \end{array}\right.$$

Cette définition a bien un sens. En effet, si $y = u(x_1) = u(x_2)$, alors $x_1 - x_2 \in \ker(u) \subset \ker(v)$ et donc $v(x_1) = v(x_2)$. De plus, f ainsi défini est bien linéaire. Il suffit de verifier la linéarité sur $\mathrm{Im}(u)$. Mais prenons $y_1 = u(x_1)$, $y_2 = u(x_2) \in \mathrm{Im}(u)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$y_1 + \lambda y_2 = u(x_1) + \lambda u(x_2) = u(x_1 + \lambda x_2)$$

et donc

$$f(y_1+\lambda y_2) = v(x_1+\lambda x_2) = v(x_1) + \lambda v(x_2) = f(y_1) + \lambda f(y_2).$$

Ceci achève la preuve du résultat.

Correction de l'exercice 5 ▲

$(ii) \implies (i)$: c'est l'implication facile. En effet, si $x \in \mathrm{Im}(v)$, alors $x = v(y) = u(w(y))$ et donc $x \in \mathrm{Im}(u)$. $(i) \implies (ii)$: commençons par réfléchir à ce que l'on souhaite... Pour $x \in E$, on veut définir $w(x) \in F$ tel que $u(w(x)) = v(x)$. Mais, puisque $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $y \in F$ tel que $v(x) = u(y)$. On a envie de poser $w(x) = y$, ce qui donne la bonne factorisation. Le problème c'est que plusieurs y peuvent répondre à ce problème... On va se simplifier la tâche en considérant F_1 un supplémentaire de $\ker u$ dans F. Alors $u_{|F_1}$ est un isomorphisme de F_1 sur $\mathrm{Im}(u)$. En particulier, on peut définir l'isomorphisme réciproque $f : \mathrm{Im}(u) \to F_1$

vérifiant $u(f(x)) = x$. On pose alors $w(x) = f(v(x))$, qui a bien un sens puisque $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$. Ainsi, w est bien un élément de $\mathscr{L}(E,F)$, et

$$\forall x \in E, u(w(x)) = u(f(v(x))) = v(x).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Posons $S = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$. Alors on remarque que $TS = I_{n+m}$. Ainsi, T est inversible et son inverse est S.

Correction de l'exercice 7 ▲

La matrice $A \otimes B$ est une matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$. De plus, ses coefficients diagonaux sont constitués par :

les coefficients diagonaux de B multipliés par $a_{1,1}$ les coefficients diagonaux de B multipliés par $a_{2,2}$ $\vdots$ les coefficients diagonaux de B multipliés par $a_{n,n}$.

Donc ce sont les $a_{i,i}b_{j,j}$, pour $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots p$. On a donc

$$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,i}b_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_{j,j}\right) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On cherche N sous la forme $\begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$. En étudiant la première colonne de MN, on voit qu'il est commode de choisir $E = I_p$. En regardant la deuxième colonne, on doit avoir

$$\begin{cases} AF + BG &= 0 \\ CF + DG &= D - CA^{-1}B. \end{cases}$$

Le choix $G = I_q$ et $F = -A^{-1}B$ donne alors le résultat.

2. On s'est ramené à des matrices triangulaires par blocs. On a en effet

$$\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(A)\det(S).$$

On conclut car N est elle aussi triangulaire par blocs et $\det(N) = 1$.

Correction de l'exercice 9 ▲

On va plutôt déterminer la dimension du noyau de M. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ tel que $MX = 0$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} AX_1 &= 0 \\ BX_1 + CX_2 &= 0 \end{cases}$$

Puisque A est inversible, c'est équivalent à $X_1 = 0$ et $CX_2 = 0$, c'est-à-dire $X_2 \in \ker(C)$. On a donc $\ker(M) = \{0\} \times \ker(C)$ et donc $\dim(\ker(M)) = \dim(\ker(C))$. Il vient

$$\mathrm{rg}(M) = p + q - \dim(\ker(M)) = p + (q - \dim(\ker(C)) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(C).$$

Correction de l'exercice 10 ▲

On va calculer la dimension du noyau de B. Notons m_i le nombre de colonnes de A_i et r_i le rang de A_i, pour $i = 1, \dots, n$. Notons E_i le noyau de A_i, qui est, par le théorème du rang, de dimension $m_i - r_i$. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

Alors

$$BX = 0 \iff \forall i = 1, \dots, n,\ A_i X_i = 0 \iff \forall i = 1, \dots, n,\ X_i \in E_i.$$

On en déduit que $\ker B = E_1 \times \dots \times E_n$ et donc

$$\begin{aligned} \dim(\ker(B)) &= \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n) \\ &= (m_1 + \dots + m_n) - (r_1 + \dots + r_n). \end{aligned}$$

Appliquant à nouveau le théorème du rang, on trouve que

$$\mathrm{rg}(B) = (m_1 + \dots + m_n) - \dim(\ker(B)) = r_1 + \dots + r_n.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

On notera, pour éviter toute confusion, u et non A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.

1. Puisque A est de rang r, $\ker(u)$ est de dimension $n - r$ d'après le théorème du rang. Soit S un supplémentaire de $\ker(u)$, de dimension r, et considérons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S, $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$, de sorte que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Alors la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ a bien la forme voulue.

2. On reprend la même démonstration, mais cette fois on choisit comme supplémentaire de $\ker(u)$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$. On a alors bien $C = 0$, et puisque le rang de A vaut r, il en est de même du rang de B qui est donc inversible.
