Chapitre : Exercices sur compacité, connexité par arcs, espaces vectoriels normés de dimension finie

1 Ensembles compacts

Exercice 1 –

Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^4=1\} \qquad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^5=2\}$$
$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+xy+y^2\leq 1\} \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+8xy+y^2\leq 1\}$$
$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2=x(1-2x)\}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1539]

Exercice 2 Boule unité non compacte –

Soit $E=\mathscr{C}([0,2\pi])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=e^{inx}$.
1. Calculer $\|f_n-f_p\|_2$ pour $p,n\in\mathbb{N}$.
2. En déduire que $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

Indication ▼ Correction ▼ [1547]

Exercice 3 Somme de deux compacts –

Soient K,L deux parties compactes d'un espace vectoriel normé E. On pose $K+L=\{x+y;\ x\in K,\ y\in L\}$. Démontrer que $K+L$ est une partie compacte de E.

Indication ▼ Correction ▼ [1541]

Exercice 4 Enveloppe convexe d'un compact –

Soit E un espace vectoriel normé de dimension n. Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle enveloppe convexe de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in(\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tels que $\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=1$, et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i$, où $x_1,\dots,x_{n+1}\in F$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in\mathscr{H}$. Le but de l'exercice est de démontrer que si K est une partie compacte de E, alors $\mathrm{Conv}(K)$ est aussi une partie compacte de E.
1. Démontrer que $\mathscr{H}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Définir une application continue $\phi:\mathbb{R}^{n+1}\times E^{n+1}\to E$ telle que $\mathrm{Conv}(K)=\phi(\mathscr{H}\times K^{n+1})$.
3. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [2523]

Exercice 5 Sphère unité et boule unité –

Soit E un espace vectoriel normé, B la boule unité fermée de E et S la sphère unité. Démontrer que B est compact si et seulement si S est compact.

Indication ▼ Correction ▼ [1540]

Exercice 6 Suites et valeurs d'adhérence –

Soit (u_n) une suite de ^{d}. Pour $n\geq 1$, on pose $A_n=\{u_p;\ p\geq n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est :

$$V=\bigcap_{n\geq 1}\overline{A_n}.$$

En déduire que si la suite est bornée, V (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.

Indication ▼ Correction ▼ [1546]

Exercice 7 ★★★★ **Suite convergente –**

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et soit x sa limite. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in\}$$

est compact.

Indication ▼ Correction ▼ [1543]

2 Applications de la compacité à la topologie

Exercice 8 ★★ **Compact contenu dans la boule unité –**

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $\bar{B}(0, r)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1542]

Exercice 9 ★★ **Distance de deux compacts –**

Soient K, L deux compacts disjoints non vides d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $d(K, L) = \inf_{x \in K,\ y \in L} \|y - x\| > 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [1550]

Exercice 10 ★★ **Somme d'un fermé et d'un compact –**

Soit F un fermé, et C un compact de ^{n}. On note $G = F + C = \{x + y;\ x \in F \text{ et } y \in C\}$. Montrer que G est fermé.

Indication ▼ Correction ▼ [1554]

Exercice 11 ★★★ **Distance à une partie –**

Soit $E =^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et A une partie non vide de E. On définit la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. On suppose dans cette question que A est compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé (on remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$).
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Indication ▼ Correction ▼ [1553]

Exercice 12 ★★★ **Intersection emboitée de compacts –**

Soit E un espace vectoriel normé et $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite de parties compactes de E, non vides, telle que, pour chaque entier $n \geq 0$, on $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$.

1. Démontrer que $K \neq \varnothing$.
2. Soit U un ouvert contenant K. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $K_n \subset U$.

Indication ▼ Correction ▼ [1557]

3 Applications aux fonctions

Exercice 13 **Fonctions non bornées à l'infini –**

Soit $f :^d \to$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Indication ▼ Correction ▼ [1559]

Exercice 14 **Fonctions non bornées à l'infini (bis) –**

Soit $f :^n \to$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M > 0,\ \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.
2. Pour toute partie bornée B de , $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de ^{n}.
3. Pour toute partie compacte K de , $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de ^{n}.

Indication ▼ Correction ▼ [1560]

Exercice 15 **Du local au global... –**

Une fonction f définie sur une partie $A \subset^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitzienne si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y,z) \in V_x^2,\ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne.

Indication ▼ Correction ▼ [1561]

Exercice 16 **Point fixe et compacité –**

Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).
2. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E fermé ?

Indication ▼ Correction ▼ [1562]

Exercice 17 **Graphe d'une fonction continue –**

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E avec A fermé, $f : A \to B$ une application et $G = \{(x, f(x));\ x \in A\}$ son graphe.

1. On suppose que f est continue. Démontrer que son graphe est fermé.

2. On suppose de plus que B est compact et que le graphe de f est fermé. Démontrer que f est continue (on pourra utiliser le théorème suivant : une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.)

Indication ▼ Correction ▼ [1564]

Exercice 18 **Valeur propre d'un endomorphisme symétrique –**

Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme symétrique de E, c'est-à-dire que u vérifie

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

On note $\mathscr{S}$ la sphère unité de E et $\phi : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(x) = \langle u(x), x\rangle$.

1. Justifier que ϕ atteint son maximum sur $\mathscr{S}$. On désignera par x_0 un point où ce maximum est atteint.

2. Soit y un vecteur unitaire orthogonal à x_0. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$x(t) = (\cos t)x_0 + (\sin t)y \text{ et } f(t) = \langle u(x(t)), x(t)\rangle.$$

Démontrer que f admet un maximum en 0.

3. En déduire que y est orthogonal à $u(x_0)$.

4. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.

Indication ▼ Correction ▼ [1566]

4 Connexité par arcs

Exercice 19 ★ Intérieur –

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E.

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.
3. L'intérieur de A est-il toujours connexe par arcs ?

Indication ▼ Correction ▼ [1578]

Exercice 20 ★★ Union de connexes par arcs ayant un point commun –

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé E telles que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Démontrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Indication ▼ Correction ▼ [1582]

Exercice 21 ★★ Continue injective –

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > y\}$ et $F(x,y) = f(x) - f(y)$, pour $(x,y) \in C$.

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [1583]

Exercice 22 ★★ Pas d'homéomorphisme ! –

On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : A \to B$ telle que f et f^{-1} soient continues.

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0,1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

Indication ▼ Correction ▼ [1577]

Exercice 23 ★★★ Théorème de Darboux –

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I;\ x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Indication ▼ Correction ▼ [1581]

Exercice 24 ★★★★ Parties ouvertes et fermées d'un connexe par arcs –

Soient A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et soit B une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée relativement à A. On pose $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

1. Démontrer que f est continue.
2. En déduire que $B = \varnothing$ ou $B = A$.

Indication ▼ Correction ▼ [1579]

Exercice 25 ★★★★ **Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont réunion d'intervalles –**

1. Démontrer que les composantes connexes par arcs d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont ouvertes.
2. En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
3. Démontrer que cette réunion est finie ou dénombrable.

Indication ▼ Correction ▼ [2794]

---

5 Espaces de dimension finie

Exercice 26 ★ **Polynômes –**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a

$$\int_0^1 |P(t)|dt \geq \lambda \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1593]

Exercice 27 ★★ **Norme et produit matriciel –**

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1592]

Exercice 28 ★★★ **Le tour d'un compact –**

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x\in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Indication ▼ Correction ▼ [1591]

Exercice 29 ★★★ **Sous-espaces vectoriels –**

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Indication ▼ Correction ▼ [1570]

Exercice 30 ★★★ **Intégrale jamais nulle –**

Soit $n \geq 1$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n. Montrer que $\inf_{P\in E_n} \int_0^1 |P(t)|dt > 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [1571]

Exercice 31 ★★★ **Théorème de Riesz –**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E.

1. Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
2. On suppose $F \neq E$. Soit $a \in E \backslash F$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$ On pose $b = (a - x)/\|a - x\|$. Démontrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
3. On suppose que E est de dimension infinie. Construire une suite (b_n) de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|b_n\| = 1 \text{ et } d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1.$$

4. En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Indication ▼ Correction ▼ [1549]

6 Topologie des espaces de matrices

Exercice 32 ★ Matrices symétriques –

Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ [1597]

Exercice 33 ★ L'ensemble des matrices diagonalisables est connexe par arcs –

Soit $n \geq 1$. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est un connexe par arcs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ [3296]

Exercice 34 ★★ Ensemble des matrices inversibles –

Montrer que l'ensemble $GL_n()$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n()$.

Indication ▼ Correction ▼ [1595]

Exercice 35 ★★★ –

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathscr{O}_n()$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?

Indication ▼ Correction ▼ [1596]

Exercice 36 ★★★ Polynômes caractéristiques –

Soient A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est inversible, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $BA = P^{-1}(AB)P$. En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

2. Soit $t \in \mathbb{C}$. On suppose que t n'est pas valeur propre de A. Montrer que les matrices $(A - tI_n)B$ et $B(A - tI_n)$ ont le même polynôme caractéristique.

3. On fixe $x \in \mathbb{C}$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ les applications définies par

$$f(t) = \det\big((A - tI_n)B - xI_n\big) \text{ et } g(t) = \det\big(B(A - tI_n) - xI_n\big).$$

Montrer que les fonctions f et g sont continues. En déduire $f(0) = g(0)$.

4. En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Indication ▼ Correction ▼ [1598]

Exercice 37 ★★★ Limites des suites de puissances –

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite (A^k) converge vers B. Démontrer que B est diagonalisable.

Indication ▼ Correction ▼ [3269]

Exercice 38 ★★★ Matrices de rang minoré –

Soit $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Montrer que l'ensemble F_p des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est son adhérence ?

Indication ▼ Correction ▼ [1599]

Exercice 39 ★★★★★ Adhérence des matrices diagonalisables –

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n()$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe un voisinage de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice diagonalisable.

Indication ▼ Correction ▼ [1601]

Indication pour l'exercice 1 ▲

[A-] Remarquer que $x^2 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$. [B-] B n'est pas borné. [C-] Utiliser $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. [D-] D n'est pas borné (prendre des points du type $(a,-a)$). [E-] $x(1-2x)$ est positif si et seulement si....

Indication pour l'exercice 2 ▲

1.
2. Démontrer que la suite (g_n) définie par $g_n = f_n/\|f_n\|_2$ ne peut pas avoir de valeur d'adhérence.

Indication pour l'exercice 3 ▲

S'inspirer de la preuve de la compacité de $K \times L$ lorsque K et L sont compacts.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. $\mathscr{H}$ est fermé borné.
2. Une application bilinéaire définie sur un espace de dimension finie est continue.
3. Image d'un compact par une application continue.

Indication pour l'exercice 5 ▲

D'une part, S est contenu dans B. D'autre part, prendre (x_n) une suite de B et considérer $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Pour montrer un des deux sens de l'inclusion, il faut construire par récurrence une suite extraite. Penser pour la deuxième partie à la caractérisation des compacts dans ^{d}.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Prendre une suite dans A, et séparer le cas où elle prend un nombre infini de valeurs distinctes ou un nombre fini.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Considérer l'application $K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Prendre deux suites (x_n) et (y_n) qui réalisent presque l'approximation puis faire deux extractions successives.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Utiliser le critère séquentiel.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Une fonction continue à valeurs réelles atteint sa borne inférieure sur un compact.
2. Prendre l'intersection B de A avec une boule de centre x_0 de rayon bien choisi.
3. Prendre y dans A, et utiliser une inégalité triangulaire (faire un dessin). On montrera que l'application est en fait 1-lipschitzienne.
4. Utiliser la continuité de l'application précédente sur un compact, et le fait que si A est fermé et $x \notin A$, alors $d(x,A) > 0$.
5. Penser à des courbes qui sont asymptotes l'une de l'autre dans ^{2}.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. Prendre une suite (x_n) telle que $x_n \in K_n$ pour tout n et extraire une sous-suite convergente.
2. Raisonner par l'absurde, et extraire une sous-suite....

Indication pour l'exercice 13 ▲

Se ramener à chercher l'inf sur une boule fermée.

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. $\implies$ 2. : raisonner par l'absurde. 2. $\implies$ 3. : utiliser l'image réciproque d'un fermé.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Raisonner par l'absurde. En déduire l'existence de deux suites (y_n) et (z_n) telles que

$$\|f(y_n) - f(z_n)\| > n\|y_n - z_n\|.$$

Extraire et obtenir une contradiction.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Etudier $\psi(x) = \|f(x) - x\|$.
2. Prendre $E =$, et une fonction quasi-tangente à $y = x$, mais qui ne la coupe jamais.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Utiliser la caractérisation séquentielle d'un fermé.
2. Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Il s'agit d'un argument de compacité.
2. $x(t)$ est un vecteur de norme 1.
3. Calculer la dérivée de f en 0.
4. $u(x_0)$ est orthogonal à tous les vecteurs orthogonaux à x_0.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Définition.
2. Image d'un connexe par arcs par une application continue.
3. Trouver un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Construire explicitement un chemin entre deux points de $\bigcup_{i \in I} A_i$, en passant par un point de l'intersection.

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. C est connexe par arcs, et F est continue.
2. $F(C)$ ne contient pas 0.

Indication pour l'exercice 22 ▲

Dans chaque cas, procéder par l'absurde, et retirer un point à un des deux espaces considérés de sorte qu'il reste connexe par arcs.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Faire un dessin.
2. Pour une inclusion, utiliser le théorème des accroissements finis, pour l'autre, la définition de la dérivée.
3. Image d'un connexe par arcs par une application continue.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Étudier l'image réciproque d'un ouvert.
2. f doit être constante.

Indication pour l'exercice 25 ▲

Indication pour l'exercice 26 ▲

Équivalence des normes en dimension finie.

Indication pour l'exercice 27 ▲

On pourra démontrer ce résultat pour une norme particulière sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Indication pour l'exercice 29 ▲

Considérer une base de F, la compléter en une base de E, et considérer une norme sur E bien adaptée à cette base. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Prouver que E_n est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser plusieurs normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. Utiliser le fait qu'une suite bornée de F admet une sous-suite convergente.
2.
3.
4. La suite (b_n) ne peut pas avoir de sous-suite convergente.

Indication pour l'exercice 32 ▲

La convergence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ entraîne la convergence coordonnées par coordonnées.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Démontrer qu'il est étoilé.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Utiliser le déterminant pour le côté ouvert, perturber toute matrice par un multiple de l'identité pour le côté dense. Ne pas oublier que l'ensemble des valeurs propres est fini.

Indication pour l'exercice 35 ▲

Vérifier qu'il est fermé et borné. Pour démontrer qu'il n'est pas connexe par arcs, on pourra utiliser le déterminant.

Indication pour l'exercice 36 ▲

1. Évidemment, P est intimement lié avec A !

2. Appliquer la question précédente.

3. f et g sont continues comme composées d'applications continues. Si A est inversible, c'est clair. Sinon, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $f(t) = g(t)$ sur $]0, r[$ (prendre $r = \min\{\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ où Λ est l'ensemble des valeurs propres non-nulles de A).

4. Question précédente !

Indication pour l'exercice 37 ▲

Quelle est la limite de la suite (A^{2k}) ? En déduire un polynôme annulateur simple pour B.

Indication pour l'exercice 38 ▲

Une matrice est de rang supérieur ou égal à p si et seulement si elle admet un déterminant extrait d'ordre p non nul.

Indication pour l'exercice 39 ▲

1. Perturber la trigonalisation d'une matrice. En particulier, une matrice admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

2. Démontrer que si $\|A - M\|_\infty < 1/4$, alors le discriminant du polynôme caractéristique de M est strictement négatif.

Correction de l'exercice 1 ▲

[A-] Puisque $x^2 \geq 0$ et $y^4 \geq 0$, l'équation $x^2+y^4=1$ entraine $x^2 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$. On obtient donc $x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,1]$, ie $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$: A est borné. De plus, A est l'image réciproque de $\{1\}$, qui est fermé, par l'application continue $f(x,y)=x^2+y^4$. A est donc également fermé. C'est bien une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. [B-] B n'est pas borné. En effet, pour tout $r>0$, $(r,\sqrt[5]{2-r^2})$ est élément de B (remarquons que l'on peut prendre la racine 5-ième de tout réel (il ne doit pas être nécessairement positif). Mais $\|(r,\sqrt[5]{2-r^2})\|_\infty \geq r$ peut être aussi grand que l'on veut. B n'est donc pas borné, et pas compact. [C-] On sait que $(|x|-|y|)^2 \geq 0$, d'où on tire l'inégalité classique $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, ce qui implique $-xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Il vient $\frac{x^2+y^2}{2} \leq x^2+xy+y^2$. Ainsi, un élément de C vérifie $\|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}$, ce qui prouve que C est borné. Comme C est de plus fermé (c'est l'image réciproque du fermé $]-\infty,1]$ par l'application continue $(x,y)\mapsto x^2+xy+y^2$), C est compact. [D-] D n'est pas borné. En effet, pour tout réel strictement positif a, le point $(a,-a)$ est dans D car $a^2-8a^2+a^2=-6a^2 \leq 0 \leq 1$. Or, la norme infini de $(a,-a)$ est a et peut donc être choisi aussi grande que l'on veut puisque a est arbitraire. Donc D n'est pas compact. [E-] Remarquons que si (x,y) est élément de E, alors $x(1-2x)\geq 0$. Or, $x(1-2x)\geq 0$ si et seulement si $x\in[0,1/2]$. Et dans ce cas, $x(1-2x)\leq 1/2\times 1=1/2$. Ainsi, si (x,y) est élément de E, on a $x\in[0,1/2]$ et $y\in[-\sqrt{1/2},\sqrt{1/2}]$. L'ensemble E est donc borné. On vérifie aisément qu'il est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x,y)\mapsto y^2-x(1-2x)$. E est donc compact.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On a, pour tous $n,p\in\mathbb{N}$,

$$\|f_n-f_p\|_2^2=\int_0^{2\pi}\left|e^{inx}-e^{ipx}\right|^2dx=\int_0^{2\pi}\left(2-2\cos\left((n-p)x\right)\right)dx.$$

On distingue alors deux cas. Si $n=p$, alors clairement $\|f_n-f_p\|_2=0$. Sinon, on a

$$\int_0^{2\pi}\cos\left((n-p)x\right)dx=0$$

et donc $\|f_n-f_p\|_2=2\sqrt{\pi}$.

2. Posons $g_n=f_n/\|f_n\|_2$. Alors (g_n) est une suite de $\bar{B}(0,1)$. De plus, puisque $\|f_n\|_2=\sqrt{2\pi}$ (cette valeur est indépendante de n), alors pour tout $n\neq p$, on a

$$\|g_n-g_p\|_2=\sqrt{2}.$$

Il vient que la suite (g_n) ne peut pas admettre de sous-suite convergente. En effet, si $(g_{\phi(n)})$ était une sous-suite convergente, alors $\|g_{\phi(n+1)}-g_{\phi(n)}\|$ devrait tendre vers 0, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, il existe dans $\bar{B}(0,1)$ une suite n'admettant pas de suite extraite convergente. La boule unité fermée n'est pas compacte.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit (z_n) une suite de $K+L$. Alors pour chaque n, z_n s'écrit $z_n=x_n+y_n$ avec $x_n\in K$ et $y_n\in L$. La suite (x_n) est une suite de K : elle admet donc une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x\in K$. De plus, la suite $(y_{\phi(n)})$ est une suite de L. Elle admet donc une suite extraite $(y_{\psi(n)})$ qui converge vers $y\in L$. Comme la suite $(x_{\psi(n)})$ est extraite de $(x_{\phi(n)})$, elle converge également vers x. Ainsi, la suite $(z_{\psi(n)})$ converge vers $x+y\in K+L$. Ce dernier ensemble est bien compact. Remarquons ici l'importance de procéder à des extractions successives.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Notons $H=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1};\ \lambda_1+\dots+\lambda_{n+1}=1\}$. Alors H est fermé : c'est l'image réciproque de $\{1\}$ par l'application continue (car linéaire en dimension finie) $\phi(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})=\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1}$. De plus, si $E_i=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:\ \lambda_i\geq 0\}$, alors E_i est également fermé. Ainsi, $\mathscr{H}=H\cap E_1\cap\dots\cap E_n$ est fermé comme intersection de fermés. De plus, $\mathscr{H}$ est borné. En effet, si $u=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in H$, alors

$$\|u\|=|\lambda_1|+\dots+|\lambda_{n+1}|=\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1}=1.$$

Ainsi, $\mathscr{H}$ est un fermé et borné de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$:$\mathscr{H}$ est compact.

2. Posons

$$\phi\left((\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}),(x_1,\dots,x_{n+1})\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i.$$

Alors ϕ est une application bilinéaire définie sur un produit de deux espaces de dimension finie. Ainsi, ϕ est continue. De plus, d'après le rappel donné par l'énoncé, on a $\mathrm{Conv}(K)=\phi(\mathscr{H}\times K^{n+1})$.

3. L'ensemble $\mathscr{H}\times K^{n+1}$ est compact comme produit d'un nombre fini de compacts. L'image d'un compact par une application continue étant un compact, on en déduit que $\mathrm{Conv}(K)$ est compact.

Correction de l'exercice 5 ▲

Un sens est assez facile. En effet, si B est compact, alors S est une partie fermée (pourquoi ?) de l'ensemble compact B. C'est donc également un compact. Réciproquement, si S est compact, prouvons que B est compact. Pour cela, considérons (x_n) une suite d'éléments de B. Si (x_n) admet une sous-suite qui converge vers 0, alors il n'y a rien à prouver. Sinon, pour tout n assez grand, $x_n\neq 0$ et on peut donc considérer $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$. Alors (y_n) est une suite de S et comme S est compact, (y_n) admet une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers $y\in S$. De plus, la suite $(\|x_{\phi(n)}\|)$ est une suite du segment $[0,1]$ qui est compact. Elle admet donc une suite extraite $(\|x_{\psi(n)}\|)$ qui converge vers le réel $a\in[0,1]$. Mais alors, $x_{\psi(n)}=\|x_{\psi(n)}\|\times y_{\psi(n)}$ converge vers ay qui est bien un élement de B. Ainsi, B est compact.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit x une valeur d'adhérence, et $n\geq 1$. x est limite d'une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$. Quitte à retirer les premiers termes de cette suite, on peut supposer qu'on a toujours $\varphi(k)\geq n$, et donc $x\in\overline{A_n}$. Pour l'inclusion réciproque, soit $x\in\bigcap_n\overline{A_n}$. On construit par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $\|u_{\varphi(n)}-x\|\leq\frac{1}{2^n}$. Au rang 0, puisque $x\in\overline{A_1}$, il est possible de choisir $\varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(0)}-x\|\leq 1$. Supposons les termes construits jusqu'au rang n. Puisque $x\in\overline{A_{\varphi(n)+1}}$, il existe $\varphi(n+1)>\varphi(n)$ tel que :

$$\|u_{\varphi(n+1)}-x\|\leq\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ceci prouve que x est une valeur d'adhérence de (u_n). L'ensemble V des valeurs d'adhérence apparait donc comme une intersection de fermés : c'est un fermé. En outre, si (u_n) est bornée, il est clair que V est aussi borné. Dans ce cas, par caractérisation des parties compactes de ^{d}, on a prouvé que V est compact.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit (y_n) une suite de A. Si elle prend un nombre infini de fois la valeur x, alors elle possède une suite extraite constante égale à x, donc convergente dans A. Sinon, y_n prend une infinité de fois une valeur différente de x. Quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer que, pour chaque n, y_n est un terme de la suite de départ, d'où $y_n=x_{\varphi(n)}$. On traite deux cas séparément :

1. La suite d'entiers $(\varphi(n))$ est bornée : autrement dit, (y_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes. Clairement, une telle suite admet une sous-suite convergente (il suffit de prendre une valeur qui est prise une infinité de fois) avec une limite dans A.

2. La suite d'entiers $(\varphi(n))$ n'est pas bornée : on peut alors extraire de (y_n) une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ telle que $\varphi\circ\psi(n)$ soit strictement croissante. Mais alors, $y_{\psi(n)}=x_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge vers x puisque c'est une suite extraite de (x_n). Dans tous les cas, on a prouvé que (y_n) admettait une suite extraite convergente : l'ensemble A est compact. On peut aussi donner une preuve en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, si on connait cette caractérisation des parties compactes des espaces vectoriels normés. Pour cela, on considère un recouvrement de A par une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, et on doit prouver qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit i_0 tel que $x\in U_{i_0}$. Alors, puisque la suite converge vers x, il existe un entier N tel que pour tout $n>N$, on a $x_n\in U_{i_0}$. Soient ensuite $i_1,\dots,i_N$ tels que, pour $j\leq N$, $x_j\in U_{i_j}$. Alors, il est clair que $U_{i_0}\cup\dots\cup U_{i_N}$ est un recouvrement ouvert de A, prouvant que A est compact. Sur cet exemple, la preuve utilisant la propriété de Borel-Lebesgue est sans doute plus facile.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $f : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$. Alors f est continue et comme K est compact, f est bornée et atteint sa borne supérieure. Soit $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \sup\{f(x);\ x \in K\}$. Alors on a $f(x_0) = \|x_0\| < 1$ puisque K est contenu dans la boule unité ouverte. Posons $r = \|x_0\| < 1$. On a donc, pour tout $x \in K$, $\|x\| = f(x) \leq f(x_0) = r$. C'est bien que K est contenu dans $\bar{B}(0,r)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Donnons deux rédactions possibles. La première consiste à remarquer que $K \times L$ est compact, comme produit de deux compacts. De plus, l'application $(x,y) \in K \times L \mapsto \|y - x\|$ est continue. Elle atteint donc son minimum. Ainsi, il existe $(x_0, y_0) \in K \times L$ tel que $\|y_0 - x_0\| = \inf\{(x,y) \in K\|y-x\|\}$. La deuxième rédaction n'utilise pas la compacité de $K \times L$ (mais, en quelque sorte, la redémontre...). Par définition de la borne inférieure, il existe deux suites (x_n) de K et (y_n) de L telles que $\|x_n - y_n\| \to d(K,L)$. Mais alors la suite (x_n) est une suite du compact K. Elle admet donc une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers $x \in K$. La suite $(y_{\phi(n)})$ est une suite du compact L. Elle admet une suite extraite $(y_{\psi(n)})$ qui converge vers $y \in L$. $(x_{\psi(n)})$ est aussi une suite extraite de $(x_{\phi(n)})$ elle converge donc encore vers x. Finalement, par passage à la limite, on a $\|x - y\| = d(K,L)$. Comme K et L sont disjoints, on en déduit que $d(K,L) = \|x - y\| > 0$.

Correction de l'exercice 10 ▲

On va utiliser le critère séquentiel pour les fermés. Soit (z_n) une suite de G qui converge vers z appartenant à ^{n}. Il suffit de prouver que $z \in G$. z_n se décompose en $z_n = x_n + y_n$, où $x_n \in F$ et $y_n \in C$. La suite (y_n) qui évolue dans le compact C admet une sous-suite convergente $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers $y \in C$. Maitenant, la suite $x_{\varphi(n)}$, qui s'écrit comme différence de deux suites convergentes, converge vers $x \in^n$, et puisque F est fermé, la limite est dans F. Par passage à la limite dans $z_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + y_{\varphi(n)}$, $z = x + y$ est dans $F + C = G$ qui est fermé. Remarquons que ce résultat est faux si on suppose simplement que F et C sont fermés. Par exemple, on peut prendre $F =$ et $C = \sqrt{2}$, dans . D'après le résultat classique de structure des sous-groupes de , $F + C$ est dense dans , sans être tout entier : en aucun cas, il ne peut donc être fermé.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. La fonction $x \mapsto \|x - x_0\|$ est continue, à valeurs réelles. Elle atteint sa borne inférieure sur tout compact.

2. On fixe un point $z \in A$, et on pose $B = A \cap \overline{B}(x_0, \|x_0 - z\|)$. Puisque $B \subset A$, il est clair que $d(x_0,B) \geq d(x_0,A)$. Maintenant, si $y \in A \backslash B$, on a $\|y - x_0\| \geq \|z - x_0\| \geq d(x_0,B)$. Ceci prouve que $d(x_0,A) = d(x_0,B)$. Maintenant, B est fermé comme intersection de deux fermés, et est compact car il est aussi borné. Il existe $y \in B \subset A$ tel que :

$$d(x_0,A) = d(x_0,B) = \|y - x_0\|.$$

3. On fixe x_0 et x_1 deux point de E, et y dans A. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\|x_0 - y\| - \|x_1 - y\| \leq \|x_0 - x_1\|.$$

On obtient ensuite :

$$d(x_0,A) \leq \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - y\|.$$

On prend enfin la borne inf pour y dans A :

$$d(x_0,A) \leq \|x_0 - x_1\| + d(x_1,A) \implies d(x_0,A) - d(x_1,A) \leq \|x_0 - x_1\|.$$

Par symétrie du rôle joué par x_0 et x_1, on a finalement :

$$|d(x_0,A) - d(x_1,A)| \leq \|x_0 - x_1\|.$$

L'application $x_0 \mapsto d(x_0,A)$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

4. L'application étant continue sur le compact B, elle y atteint son minimum, disons en $y_0 \notin A$. Puisque A est fermé, $d(y_0,A) > 0$, et donc :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \|a - b\| \geq d(b,A) \geq d(y_0,A) > 0.$$

5. Soit $A = \{(x,y) \in ^2 ; y = x\}$ et $B = \{(x,y) \in ^2 ; y = x + e^{-x}\}$. A et B sont deux fermés disjoints, mais ils ont des points infiniment proches.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout entier n, considérons $x_n \in K_n$. Alors (x_n) est une suite du compact K_0. Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers x. Mais alors, pour tout entier p et tout $n \geq p$, on a $\phi(n) \geq n \geq p$ et donc $x_{\phi(n)} \in K_p$. Puisque K_p est fermé, $x \in K_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \geq 0$, on en déduit que $x \in K$ et donc que K est non vide.

2. Supposons que ceci soit faux. Alors pour tout entier n, il existe $x_n \in K_n \cap U^c$. Mais alors, comme à la question précédente, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. Mais, puisque U^c est fermé, on a aussi que $x \in U^c$. Ceci contredit que $K \subset U$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit M un réel tel que $M > f(0)$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que $\|x\| \geq A \implies \|f(x)\| \geq M$. Ceci entraine en particulier que :

$$f(0) \leq \inf_{\|x\| \geq A} f(x).$$

Ainsi,

$$\inf_{x \in ^d} f(x) = \inf_{\|x\| \leq A} f(x).$$

Maintenant, la boule fermée de centre 0 et de rayon A est compacte dans ^{d}, et il suffit d'appliquer le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un compact admet un minimum.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. $\implies$ 2. : Soit M tel que $y \in B \implies |y| \leq M$. Soit $R > 0$ associé à ce M par la propriété 1. Si $x \in f^{-1}(B)$ et $\|x\| > R$, par (i), on aurait $|f(x)| > M$, ce qui est impossible puisque $f(x) \in B$. 2. $\implies$ 3. : K étant compacte, elle est fermée bornée. Ceci entraîne que $f^{-1}(K)$ est fermé, car l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé, et que $f^{-1}(K)$ est borné, par (ii). Les compacts de ^{n} étant exactement les fermés bornés, on a le résultat. 3. $\implies$ 1. : Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, il existe M et une suite (x_n) de ^{n} telle que $\|x_n\| \geq n$ et $|f(x_n)| \leq M$. Mais alors l'image réciproque de $[-M, M]$ contient la suite (x_n), elle n'est pas bornée et n'est par conséquent pas compacte.

Correction de l'exercice 15 ▲

On commence par observer qu'une fonction localement lipschitzienne est continue. Ensuite, on raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas lipschitzienne sur K. Pour chaque entier n, on peut donc trouver deux éléments y_n et z_n de K tels que

$$\|f(y_n) - f(z_n)\| > n\|y_n - z_n\|.$$

En particulier, $y_n \neq z_n$. Remarquons que, puisque f est bornée (elle est continue sur le compact K), disons par M, on a

$$\|y_n - z_n\| \leq \frac{2M}{n} \tag{1}$$

et donc $\|y_n - z_n\| \to 0$. D'autre part, puisqu'elle vit dans le compact K, la suite (y_n) admet une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. Puisque $\|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}\| \to 0$, il en est de même pour $(z_{\phi(n)})$. Mais on sait que f est localement lipschitzienne en x et donc il existe $C > 0$ et un voisinage V_x de x tels que

$$\forall (y,z) \in V_x^2,\ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Pour n assez grands, $y_\phi(n)$ et $z_{\phi(n)}$ sont éléments de V_x^2. On en déduit

$$n\|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}\| < \|f(y_{\phi(n)}) - f(z_{\phi(n)})\| \leq C\|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}\|.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, c'est manifestement une contradiction puisque $y_{\phi(n)} \neq z_{\phi(n)}$ pour tout $n \geq 1$.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit la fonction continue $\psi(x) = \|f(x) - x\|$, définie sur E, à valeurs dans . Cette fonction admet un minimum atteint en α. Supposons que $\alpha \neq f(\alpha)$. Alors :

$$\psi(f(\alpha)) = \|f(\alpha) - f(f(\alpha))\| < \|\alpha - f(\alpha)\| = \psi(\alpha),$$

ce qui contredit la définition de la borne inférieure. Donc $f(\alpha) = \alpha$. L'unicité est immédiate : si α et β sont deux points fixes distincts, on a en effet :

$$\|\beta - \alpha\| = \|f(\beta) - f(\alpha)\| < \|\beta - \alpha\|,$$

ce qui est absurde.

2. On prend $E =$, et $f(x) = 1$ si $x <= 0$, $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$. Cette fonction vérifie les hypothèses demandées, mais n'admet aucun point fixe.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite de G qui converge vers $(x,y) \in A \times B$. Alors, puisque f est continue, on sait que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ et donc que $y = f(x)$. Ainsi, $(x,y) \in G$ qui est fermé.

2. Soit $x \in A$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x. Il s'agit de démontrer que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Pour cela, puisque $(f(x_n))$ est une suite du compact B, il suffit de démontrer que $f(x)$ est sa seule valeur d'adhérence. Soit y une valeur d'adhérence de $(f(x_n))$. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers y. Mais $(x_{\varphi(n)})$ converge aussi vers x. Comme la suite $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})$ est une suite du fermé G, sa limite est aussi dans G. Autrement dit, $y = f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. $\mathscr{S}$ est une partie compacte de E (car c'est une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie). De plus, ϕ est une application continue de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$ comme composition d'applications continues (u et le produit scalaire). ϕ admet donc bien un maximum sur $\mathscr{S}$.

2. Par le théorème de Pythagore, pour chaque réel t, $x(t)$ est un vecteur unitaire, et on a

$$f(t) = \phi(x(t)) \leq \phi(x_0) = f(0).$$

Ainsi, f admet bien un maximum en 0.

3. Si on développe f, on trouve, en utilisant le fait que u est symétrique :

$$f(t) = \cos^2 t \langle u(x_0), x_0\rangle + 2\cos t \sin t \langle u(y), x_0\rangle + \sin^2 t \langle u(y), y\rangle.$$

f est dérivable, et comme elle admet un maximum en 0, sa dérivée y est nulle. Or,

$$f'(0) = 2\langle u(x_0), y\rangle.$$

C'est bien que $u(x_0)$ est orthogonal à y !

4. D'après la question précédente, $u(x_0)$ est orthogonal à tous les vecteurs orthogonaux à x_0. Ainsi, $u(x_0)$ est colinéaire à x_0, ce qui signifie exactement que x_0 est vecteur propre de u. On vient donc de démontrer dans cet exercice que tout endomorphisme symétrique admet un vecteur propre.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Soit $(a,b) \in A \times B$ et $(a',b') \in A \times B$. Puisque A est connexe par arcs, il existe $f : [0,1] \to A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = a'$. Puisque B est connexe par arcs, il existe $g : [0,1] \to B$ continue telle que $g(0) = b$ et $g(1) = b'$. Mais alors, posons, pour $t \in [0,1]$, $h(t) = (f(t), g(t))$. Alors h est continue, à valeurs dans $A \times B$ et $h(0) = (a,b)$, $h(1) = (a',b')$. Ainsi, $A \times B$ est bien connexe par arcs.

2. Soit $\phi : A \times B \to E$, $(a,b) \mapsto a+b$. Alors ϕ est continue, et $\phi(A \times B) = A+B$. Puisque $A \times B$ est connexe par arcs, il en est de même de $A+B$.

3. Trouvons un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$. Il suffit de prendre pour A la réunion de deux boules disjointes que l'on relie par un segment. Cet ensemble est connexe par arcs. En revanche, l'intérieur, qui est égal à la réunion des deux boules ouvertes, n'est plus connexe par arcs car on ne peut plus passer de l'une à l'autre.

Correction de l'exercice 20 ▲

Soient $a,b \in \bigcup_{i\in I} A_i$. On va construire explicitement un chemin allant de a à b. Soit $c \in \bigcap_{i\in I} A_i$ et soit i_1, i_2 tel que $a \in A_{i_1}$ et $b \in A_{i_2}$. Alors, puisque A_{i_1} est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ_1 contenu dans A_{i_1} tel que γ_1 relie a à c. Puisque A_{i_2} est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ_2 contenu dans A_{i_2} tel que γ_2 relie c à b. Alors le chemin constitué de γ_1 suivi de γ_2 est un chemin contenu dans $\bigcup_{i\in I} A_i$ qui relie a à b. Ainsi, $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Remarquons d'abord que C est connexe par arcs, car convexe (faire un dessin). Puisque F est continue, $F(C)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle.

2. Puisque f est injective, $0 \notin F(C)$. Puisque $F(C)$ est un intervalle, on a ou bien $F(C) \subset]0,+\infty[$ (et dans ce cas f est strictement croissante), ou bien $F(C) \subset]-\infty,0[$ (et dans ce cas f est strictement décroissante). Dans tous les cas, on a bien prouvé que f est strictement monotone.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs. Considérons en effet x et y dans $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Il est facile de voir que l'on peut tracer un arc constitué de deux segments joignant x à y sans passer par l'origine.

2. Procédons par l'absurde et imaginons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ soient homéomorphes. Il existerait alors une bijection $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui soit continues. Posons $a = f(0,0)$. Alors $f : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{a\}$ resterait une bijection continue. Mais $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ est connexe par arcs, et $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ ne l'est pas (les parties de $\mathbb{R}$ connexes par arcs sont les intervalles).

3. On procède de la même façon, en remarquant que le cercle privé d'un point est connexe par arcs, ce qui n'est pas le cas de $[0,1]\backslash\{1/2\}$. En notant $\mathscr{C}$ le cercle unité et $f : \mathscr{C} \to [0,1]$ une éventuelle bijection continue, on pose $M = f^{-1}(1/2)$ et on remarque qu'on obtient encore une bijection continue entre le connexe par arcs $\mathscr{C}\backslash\{M\}$ et le non connexe par arcs $[0,1]\backslash\{1/2\}$.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. A est convexe, donc connexe par arcs.

2. Soit $z \in g(A)$. Alors il existe $(x,y) \in A$ tel que

$$z = g(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $a \in I$ tel que

$$z = g(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(a)$$

et donc $z \in f'(I)$. D'autre part, soit $z = f'(a) \in f'(I)$. Soit (b_n) une suite de I qui tend vers a par valeurs supérieures. Alors, on a par la définition de la dérivée en a que

$$f'(a) = \lim_{n\to+\infty} g(a,b_n).$$

Mais $g(a,b_n) \in g(A)$, et donc $z \in \overline{g(A)}$.

3. $g(A)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Ainsi, $f'(I)$, qui est compris entre un intervalle et l'adhérence d'un intervalle, est lui-même un intervalle.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On va prouver que l'image réciproque de O est un ouvert de A. On distingue quatre cas.

Si $0 \notin O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = \varnothing$, qui est bien ouvert (relatif de A). Si $0 \notin O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = B$, qui est bien ouvert (relativement à A). Si $0 \in O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = B^c$, qui est bien ouvert relativement à A puisque B est fermé relativement à A. Si $0 \in O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = A$, qui est bien un ouvert relatif de A.

Ainsi, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, et donc f est continue.

2. Si $0 \notin O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = \varnothing$, qui est bien ouvert (relatif de A).

3. Si $0 \notin O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = B$, qui est bien ouvert (relativement à A).

4. Si $0 \in O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = B^c$, qui est bien ouvert relativement à A puisque B est fermé relativement à A.

5. Si $0 \in O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = A$, qui est bien un ouvert relatif de A.

6. Puisque A est connexe par arcs et que f est continue, $f(A)$ est connexe par arcs. C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Mais $f(A) \subset \{0,1\}$, et il y a donc deux cas possibles : $f(A) = \{0\}$, ce qui signifie que $B = \varnothing$, et $f(A) = \{1\}$, ce qui signifie que $B = A$.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et C une composante connexe par arcs de U. Soit $x \in U$. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. Cette boule est un connexe par arcs contenu dans U et contenant x. Elle est donc incluse dans la composante connexe par arcs de U qui contient x, et donc $B(x,r) \subset C$. C est donc voisinage de chacun de ces points, c'est bien un ouvert.

2. On suppose maintenant que U est un ouvert de $\mathbb{R}$. Notons $(C_i)_{i\in I}$ les composantes connexes par arcs de U, i décrivant un certain ensemble I. Les ensembles C_i sont deux à deux disjoints (comme toujours pour les composantes connexes par arcs). Pour tout $i \in I$, la question précédente montre que C_i est un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme C_i est connexe par arcs, c'est un intervalle de $\mathbb{R}$, autrement dit C_i est un intervalle ouvert. Ainsi, U est bien réunion disjointe d'intervalles ouverts.

3. En gardant les notations de la question précédente, il reste à montrer que l'ensemble I est fini ou dénombrable. Pour tout $i \in I$, l'intervalle C_i contient un nombre rationnel q_i . Si $i, j \in I$ sont distincts, les intervalles C_i et C_j sont disjoints, donc $q_i \neq q_j$. Il en résulte que $i \mapsto q_i$ est une application injective de I dans $\mathbb{Q}$, d'où la conclusion, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Correction de l'exercice 26 ▲

Il suffit de remarquer que E est de dimension finie et que $\int_0^1 |P(t)|dt$ et $\sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ définissent des normes sur E. Elles sont donc équivalentes d'où le résultat.

Correction de l'exercice 27 ▲

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre cet exercice. On peut par exemple prouver que l'inégalité est vraie pour une norme particulière sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puis utiliser l'équivalence des normes. Précisément, considérons $N_\infty(A) = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$. Prenons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $C = AB$. Alors on a, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \times |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} N_\infty(A)N_\infty(B)$$

ce qui prouve que $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$. Mais d'autre part, N et N_∞ sont équivalentes. Il existe donc $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$. On en déduit que

$$N(AB) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(AB) \leq \frac{1}{\alpha}nN_\infty(A)N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha}N(A)N(B).$$

Correction de l'exercice 28 ▲

Il suffit de démontrer que L est fermé et borné. D'abord, puisque K est compact, il est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, on a $\|x\| \leq M$. Prenons ensuite $y \in L$. Alors il existe $x \in K$ tel que $\|y - x\| \leq r$.

Il vient $\|y\| \leq \|x\| + r \leq M + r$ et donc L est bornée. Soit ensuite (y_n) une suite de L qui converge vers $y \in E$, et prouvons que $y \in L$. Pour chaque entier n, il existe $x_n \in K$ tel que $\|y_n - x_n\| \leq r$. Puisque K est compact, il existe $x \in K$ et une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers x. Mais alors $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y et de l'inégalité $\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| \leq r$, on tire en passant à la limite que $\|y - x\| \leq r$. Ceci prouve que $y \in L$, et donc que L est compact.

Correction de l'exercice 29 ▲

Soit F un tel sous-espace, et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_q)$ de E. On considère enfin la norme N sur E :

$$N\left(\sum_{i=1}^{q} x_i e_i\right) = \max_i |x_i|.$$

Rappelons que, puisque E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, il suffit de prouver que F est fermé relativement à cette norme. Soit $(x(n))$ une suite de F, qui converge vers $x \in E$ pour cette norme. Chaque $x(n)$ s'écrit :

$$x(n) = x_1(n)e_1 + \dots x_p(n)e_p + x_{p+1}(n)e_{p+1} + \dots + x_q(n)e_q,$$

avec $x_i(n) = 0$ si $i \geq p+1$. On décompose également x sous cette forme :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_q e_q.$$

Remarquons maintenant que :

$$|x_i(n) - x_i| \leq N(x(n) - x).$$

Ceci prouve que chaque suite $(x_i(n))$ converge vers x_i (dans un evn de dimension finie, la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée). En particulier, pour $i \geq p+1$, $x_i = 0$ ce qui prouve que $x \in F$.

Correction de l'exercice 30 ▲

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. L'idée est que toutes les normes sont équivalentes sur E, et on va utiliser deux normes différentes, chacune étant bien adaptée à une partie du problème. La première est

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|dt$$

dont on sait que c'est une norme. D'autre part, pour $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, on pose

$$N(P) = \sup_k |a_k|.$$

Il s'agit aussi d'une norme sur E. En utilisant N, on vérifie aisément que E_n est une partie fermée de E. En effet, l'application linéaire $\phi(P) = a_n$, où $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, est continue puisqu'elle vérifie

$$|\phi(P)| \leq N(P).$$

On conclut alors de la façon suivante : si $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)|dt = \inf_{P \in E_n} \|P\|_1 = 0$, on peut trouver une suite (P_k) de E_n telle que $\|P_k\|_1 \to 0$. Autrement dit, (P_k) converge vers 0. Mais puisque E_n est fermé, on aurait $0 \in E_n$ ce qui n'est pas le cas.

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, il existe une suite (x_n) de F telle que $\|x_n - a\| \to d(a, F)$. En particulier, la suite (x_n) est bornée et c'est une suite de l'espace vectoriel normée de dimension finie F. Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in F$. Mais alors, par passage à la limite, on a $\|x - a\| = d(a, F)$.

2. Il est d'abord évident que $\|b\| = 1$. De plus, $d(b,F) \leq \|b-0\| \leq 1$. De plus, pour tout $y \in F$, on a

$$\|b-y\| = \frac{1}{\|a-x\|} \times \|a-z\|$$

où $z = x + \|a-x\|y \in F$. Ainsi, $\|b-y\| \geq 1$ et donc $d(b,F) \geq 1$.

3. On construit la suite (b_n) par récurrence. On l'initialise avec b_0 un vecteur unitaire, puis si $b_0,\dots,b_{n-1}$ ont été construits, on définit b_n en utilisant le résultat de la question précédente avec $F = \mathrm{vect}(b_0,\dots,b_{n-1})$. Bien sûr, $F \neq E$ puisque E est de dimension infinie.

4. Si la boule unité fermée de E était compacte, la suite (b_n) construite à la question précédente aurait une sous-suite convergente. Mais ce n'est pas le cas. En effet, pour tout $n > m$, on a

$$\|b_n - b_m\| \geq d(b_n, \mathrm{vect}(b_0,\dots,b_{n-1})) = 1.$$

On ne peut pas extraire d'une telle suite une suite convergente. Autrement, si $(b_{\phi(n)})$ était une telle suite, on aurait $\|b_{\phi(n+1)} - b_{\phi(n)}\| \to 0$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

Correction de l'exercice 32 ▲

Soit $(S_{i,j}(k))$ une suite de matrices symétriques qui converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers la matrice $S = (S_{i,j})$. Alors tous les entiers $1 \leq i,j \leq n$ et $k \geq 1$, on a $S_{i,j}(k) = S_{j,i}(k)$. Puisque la convergence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ entraîne la convergence coordonnées par coordonnées, ceci implique en faisant tendre k vers $+\infty$ que $S_{i,j} = S_{j,i}$ pour tous $1 \leq i,j \leq n$. Ainsi, la matrice S est symétrique et l'ensemble des matrices symétriques est fermé.

Correction de l'exercice 33 ▲

Il suffit de démontrer qu'il est étoilé. En effet, la matrice nulle est diagonalisable, et si D est une matrice diagonalisable, alors tD est diagonalisable. Donc le segment $[0,D]$ est complètement contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables. Ce dernier ensemble est étoilé en 0.

Correction de l'exercice 34 ▲

L'application déterminant est continue sur $\mathscr{M}_n()$ (c'est un polynôme en les coefficients de la matrice). En outre,

$$GL_n() = \det{}^{-1}(^*).$$

Ainsi, cet ensemble est ouvert comme image réciproque d'un ouvert. Prouvons qu'il est dense. Une matrice M n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $0 < |\lambda| < \rho$ entraîne que $M - \lambda I$ est inversible. En outre, si $\lambda \to 0$, $M - \lambda I \to M$, et donc M est limite d'une suite de matrices inversibles.

Correction de l'exercice 35 ▲

Il suffit de prouver que cet ensemble est fermé et borné, puisque $\mathscr{M}_n()$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2. Mais cet espace est fermé, car c'est l'image réciproque d'un fermé, à savoir I_n, par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$. Il est de plus borné. Munissons $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie N_∞ et notons f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, si M est orthogonale, f est une isométrie et on a

$$|m_{i,j}| = |\langle f(e_j), e_i\rangle| \leq 1.$$

Enfin, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, s'il l'était, puisque l'application déterminant est continue, l'image de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ par l'application déterminant serait un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle. Or, il est facile de voir que si $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M)^2 = 1$ et donc $\det(M) = \pm 1$. De plus, ces deux valeurs sont atteintes, car $\det(I_n) = 1$ et $\det(A) = -1$ où A est la matrice orthogonale diagonale avec -1 pour premier coefficient sur la diagonale, et 0 ailleurs. On a donc $\det(\mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$, et donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Correction de l'exercice 36 ▲

1. On a $BA = A^{-1}ABA$ et donc la propriété est vraie avec $P = A$. Les matrices AB et BA sont donc semblables. Elles ont le même polynôme caractéristique.

2. Puisque t n'est pas valeur propre de A, la matrice $A - tI_n$ est inversible. Ceci est donc une application directe de la question précédente.

3. Les fonctions $t \mapsto A - tI_n$, $(C,D) \mapsto CD$ (produit matriciel) et $M \mapsto \det M$ sont continues. Les fonctions f et g sont donc continues comme composées de fonctions continues. Si A est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique, ce qui se traduit par $f(0) = g(0)$. Sinon, puisque A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $t \in]0,r[$, t n'est pas valeur propre de A. Ainsi, pour tout $t \in]0,r[$, $A - tI_n$ est inversible et donc, d'après la question précédente, $(A - tI_n)B$ et $B(A - tI_n)$ ont le même polynôme caractéristique. En particulier on a

$$\det\big((A - tI_n)B - xI_n\big) = \det\big(B(A - tI_n) - xI_n\big).$$

Ceci signifie que $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in]0,r[$. On fait ensuite tendre t vers 0 et on utilise la continuité de f et g pour en déduire que $f(0) = g(0)$.

4. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$\det(AB - xI_n) = f(0) = g(0) = \det(BA - xI_n).$$

Ceci signifie exactement que les deux polynômes caractéristiques sont égaux.

Correction de l'exercice 37 ▲

Puisque la suite (A^{2k}) est une suite extraite de (A^k), elle converge vers B. Mais on a aussi

$$A^{2k} = A^k \cdot A^k.$$

Par continuité du produit de matrices, on en déduit que

$$A^{2k} \to B \cdot B = B^2.$$

Par unicité de la limite, on a $B^2 = B$, et donc $B^2 - B = 0$. Ainsi, B admet comme polynôme annulateur le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$, qui est scindé à racines simples. La matrice B est donc diagonalisable.

Correction de l'exercice 38 ▲

L'important dans cet exercice est d'utiliser une bonne caractérisation de ces matrices. Nous allons utiliser la suivante : une matrice est de rang supérieur ou égal à p si et seulement si elle admet un déterminant extrait d'ordre p non nul. Soit A une telle matrice. Alors par continuité du déterminant, pour toute matrice assez proche de A, le même déterminant extrait sera non nul et donc la matrice sera de rang supérieure ou égal à p. Ainsi F_p est ouvert. Remarquons ensuite que F_p contient $GL_n(\mathbb{R})$, qui est dense. Donc F_p est dense et son adhérence est $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 39 ▲

1. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n()$. Puisque A est trigonalisable, A s'écrit :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On pose, pour tout k :

$$A_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & * & \dots & & \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{k} & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 + \frac{3}{k} & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dès que k est assez grand, les nombres $\lambda_i + \frac{i}{k}$ sont tous distincts (si $\lambda_i = \lambda_j$, c'est clair, et si $\lambda_i \neq \lambda_j$, ce n'est pas non plus très compliqué à vérifier !). Donc les matrices A_k sont diagonalisables. Et elles tendent évidemment vers A.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $\|A - M\|_\infty < 1/4$. Alors le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc).$$

Son discriminant est donc

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc)$$

En utilisant que $-1/4 \leq a, d \leq 1/4$, $3/4 \leq c \leq 5/4$ et $-5/4 \leq b \leq -3/4$, on trouve que

$$\Delta \leq \frac{1}{4} - 4\left(\frac{9}{16} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4} - 2 < 0.$$

Ainsi, M n'admet pas de valeurs propres réelles et n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). Le résultat de la question précédente est donc faux dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.