Chapitre : Exercices sur les intégrales à paramètres

1 Permutation suites et intégrales

Exercice 1 ★ **Théorème de convergence dominée - 1 –**

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{\pi/4}(\tan t)^n dt\right)$ **2.** $\left(\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}\right)$

3. $\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}dx\right)$ **4.** $\left(\int_0^1 f(t^n)dt\right)$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue.

Indication ▼ Correction ▼ [1672]

Exercice 2 ★★ **Majoration un peu subtile –**

Pour $n\geq 1$ et $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=nx(1-x)^n$.
1. Démontrer que, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\geq 1$, on a $|f_n(x)|\leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx$.

Indication ▼ Correction ▼ [1673]

Exercice 3 ★★ **Découpage - 1 –**

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+e^x}\right)$ **2.** $\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}\right)$

Indication ▼ Correction ▼ [1674]

Exercice 4 ★★ **Découpage - 2 –**

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{+\infty}\arctan(nx)e^{-x^n}dx\right)$ **2.** $\left(\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{n+2}}dx\right)$

Indication ▼ Correction ▼ [1675]

Exercice 5 ★★ **Avec les bornes qui varient –**

Déterminer la limite, quand $n\to+\infty$, de

$$\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1676]

Exercice 6 ★★ **Après un changement de variables –**

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue.
1. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt.$$

2. On suppose que f est bornée et que $f\geq 0$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}nf(t)e^{-nt}dt.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1677]

Exercice 7 ★★★★ **Fonction Gamma –**

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1680]

Exercice 8 ★★★★★ **Lemme de Cantor –**

Soit $]a,b[$ un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels. On suppose que pour tout $x \in]a,b[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \big(a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)\big) = 0.$$

On souhaite prouver que (a_n) et (b_n) convergent vers 0. On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas.

1. Démontrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que, pour tout $x \in]a,b[$, la suite

$$f_k(x) = \frac{\big(a_{n_k}\sin(n_k x) + b_{n_k}\cos(n_k x)\big)^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$$

tende vers 0 pour tout $x \in]a,b[$.

2. En calculant de deux façons différentes $\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$, trouver une contradiction.

Indication ▼ Correction ▼ [1681]

Exercice 9 ★★★ **Changement de variables.... –**

Soit (a_n) une suite de $]0,+\infty[$ qui converge vers 0. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}dx$.

Indication ▼ Correction ▼ [1682]

2 Équivalent et développement asymptotique d'intégrales à paramètres

Exercice 10 ★★ **Un équivalent –**

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{nx^2 + \sqrt{x}}$. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [3458]

Exercice 11 ★★ **Après un changement de variables –**

Démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n}dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

Indication ▼ Correction ▼ [2626]

Exercice 12 ★★★ **Un équivalent –**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. On pose $I_n = n\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx$. Déterminer $\ell = \lim_{n\to+\infty} I_n$.

2. On suppose de plus que f est $\mathscr{C}^1$, de dérivée bornée, et vérifie $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.

3. On ne suppose plus que f est $\mathscr{C}^1$, mais uniquement que f est dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$. On définit g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ si $t > 0$ et $g(0) = f'(0)$.

Justifier que g est bornée. Démontrer que le résultat obtenu à la question précédente reste vrai.

4. Justifier que g est bornée.

5. Démontrer que le résultat obtenu à la question précédente reste vrai.

Indication ▼ Correction ▼ [1678]

Exercice 13 ★★★★ **Un équivalent –**

On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt.$$

1. Déterminer $\ell = \lim_{n\to+\infty} I_n$.

2. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.

Indication ▼ Correction ▼ [1679]

Exercice 14 ★★★★ **Un développement asymptotique –**

Donner un développement asymptotique à deux termes de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n}dx$.

Indication ▼ Correction ▼ [3457]

3 Permutation séries et intégrales

Exercice 15 ★★ **Deux versions de la permutation séries/intégrales –**

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3455]

Exercice 16 ★★ **Calcul de deux sommes –**

1. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

2. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

4. En calculant de deux façons $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$, déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1683]

Exercice 17 ★★ **Des limites du théorème d'intégration terme à terme –**

On souhaite dans cet exercice démontrer l'égalité suivante :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}.$$

Pour cela, on veut partir de l'égalité

$$\frac{1}{1+t^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^{3n+3}}$$

valide pour $t>1$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
2. Pour $n\geq 0$ et $t>1$, on pose $R_n(t)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{t^{3k+3}}$. Démontrer que $\int_1^{+\infty}R_n(t)dt$ tend vers 0, et conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [3454]

Exercice 18 ★★ **Exponentielle –**

Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\sum_n a_n n!$ converge absolument. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nn!.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1684]

Exercice 19 ★★★ **Géométrique ! –**

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a,b>0$, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1685]

Exercice 20 ★★★ **Après un développement en série entière –**

Démontrer que $\int_0^{+\infty}\cos(\sqrt{x})e^{-x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1686]

Exercice 21 ★★★ **Egalité série/intégrale –**

Démontrer que $\int_0^1\ln(x)\ln(1-x)dx=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)^2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3326]

Exercice 22 ★★★ **Sans le théorème d'intégration terme à terme –**

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Pour $t\in]0,1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme d'une série $\sum_{n\geq 0}u_n(t)$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}\int_0^1|u_n(t)|dt$. Que peut-on en déduire ?

3. On pose $S_N(t)=\sum_{n=0}^{N}u_n(t)$. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)dt.$$

4. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt$$

puis la valeur de $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1687]

Exercice 23 ★★★★ Somme trigonométrique –

Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π.

1. Démontrer que

$$\Re e\left(\int_0^1\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right)=-\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

2. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 e^{i(n+1)\theta}x^n dx=\int_0^1\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx.$$

3. Conclure que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\theta)}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1688]

Exercice 24 ★★★★ Une jolie égalité ! –

Le but de cet exercice est de démontrer la remarquable identité :

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^m}.$$

1. Justifier la convergence de chacun des membres de l'égalité précédente.
2. Pour p et q des entiers naturels, on pose $I(p,q)=\int_0^1 x^p(\ln x)^q dx$; justifier la convergence de cette intégrale.
3. Calculer $I(m,0)$ pour $m\in\mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $I(p,q)$ pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.
5. En développant $\frac{1}{x^x}$ en série, justifier que

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}I(n,n).$$

6. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [1689]

---

4 Etude de fonctions définies par une intégrale

Exercice 25 ★ Continuité d'une intégrale à paramètres –

1. Démontrer que $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2t^2)}{1+t^2}dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $G:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2t^2)e^{-xt}dt$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Indication ▼ Correction ▼ [3462]

Exercice 26 ★ Une intégrale à paramètres de classe $\mathscr{C}^\infty$ –

1. Déterminer l'ensemble de définition D de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $D \backslash \{0\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3461]

Exercice 27 ★★ Calcul d'une intégrale impropre par dérivation –

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que F est $\mathscr{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $F'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1694]

Exercice 28 ★★ Fraction rationnelle –

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}.$$

1. Justifier l'existence de $I_n(x)$.
2. Calculer $I_1(x)$.
3. Démontrer que I_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et former une relation entre $I_n'(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
4. En déduire qu'il existe une suite (λ_n) telle que, pour tout $x > 0$, on a

$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}.$$

Que vaut λ_n ?

Indication ▼ Correction ▼ [1698]

Exercice 29 ★★ Solution d'une équation différentielle –

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.
1. Démontrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Justifier que F tend vers 0 en $+\infty$.
3. Démontrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1693]

Exercice 30 ★★★ Comportement au bord ! –

Pour $x > 0$, on définit

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} dt.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$, valable pour $t \in [0, \pi/2]$, démontrer que

$$f(x) \sim_{0^+} -\ln x.$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [1695]

Exercice 31 ★★★ –

Soient $a, b > 0$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)dt.$$

1. Justifier l'existence de $F(x)$.
2. Prouver que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
3. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2}\right) + C.$$

4. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$F(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt)dt,$$

où $\psi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$.

5. En déduire la valeur de C.

Indication ▼ Correction ▼ [1696]

Exercice 32 ★★★★ **Une fonction définie par une intégrale** –

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)} dt.$$

1. Justifier que γ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que γ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Etablir la relation suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(x) = 1 - 4x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{1 + e^{2t}} dt.$$

4. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(x) = 1 + 2x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + x^2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [2641]

Exercice 33 ★★★★ **Complet...** –

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et démontrer que F est continue sur ce domaine de définition.
2. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1 + t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt.$$

En déduire le sens de variation de F.

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

4. On suppose que F admet une limite ℓ en 1^+. Démontrer que pour tout $A > 1$ et tout $x > 1$, on a

$$\ell \geq \int_1^A \frac{dt}{1+t^x}.$$

5. En déduire que $\lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [1697]

5 Fonctions classiques

Exercice 34 ★★★ Transformée de Fourier de la gaussienne –

On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x).$$

2. En déduire que pour tout x réel, $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$, puis que

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1699]

Exercice 35 ★★★ Calcul de l'intégrale de Gauss –

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de I.

Indication ▼ Correction ▼ [1700]

Exercice 36 ★★★ Calcul de l'intégrale de Gauss –

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et démontrer que

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

3. En intégrant F' sur $]0, +\infty[$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1701]

Exercice 37 ★★★ Fonction de Bessel –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

3. Démontrer que f est développable en série entière.

Indication ▼ Correction ▼ [1702]

Exercice 38 ★★★ Fonction gamma –

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire que Γ est C^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.

3. Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4. En déduire que Γ est C^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
6. Montrer que Γ est convexe.
7. Justifier que, pour tout $u < -1$, $\ln(1-u) \leq -u$. Pour $x > 0$, on pose

$$f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}(1 - t/n)^n & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \Gamma(x)$.

8. Justifier que, pour tout $u < -1$, $\ln(1-u) \leq -u$.
9. Pour $x > 0$, on pose

$$f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}(1 - t/n)^n & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \Gamma(x)$.

10. En déduire que pour $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du.$$

11. En utilisant des intégrations par parties successives, conclure que, pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1703]

Exercice 39 ★★★ **Transformée de Laplace et fonctions intégrales –**

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On note $I =]0,+\infty[$ et on suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On définit la transformée de Laplace $Lf : I \to \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in I$,

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt.$$

1. Démontrer que Lf est continue sur I.

2. On suppose dans cette question que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} xLf(x) = f(0)$ (théorème de la valeur initiale).

3. On suppose dans cette question que f admet une limite ℓ_∞ en $+\infty$. Démontrer que $\lim_{x\to 0} xLf(x) = \ell_\infty$ (théorème de la valeur finale).

Indication ▼ Correction ▼ [3463]

Exercice 40 ★★★★ **Transformée de Laplace et intégrales à paramètres –**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$ converge pour $y > x$.

2. Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf ?

3. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [1705]

6 Exercices théoriques

Exercice 41 ★★★ **Norme 0 –**

Soit f une application définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t)dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.

2. En déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 f^\alpha(t)dt\right)^{1/\alpha}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1706]

Exercice 42 ★★★★ **Division des fonctions régulières –**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et on pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Justifier que, pour $x \neq 0$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$, et en déduire que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose désormais que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$, $x \neq 0$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1707]

Exercice 43 ★★★★ **Super-dépendance ! –**

Soient I un intervalle, $f : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues. Démontrer que $F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$ est continue sur I.

Indication ▼ Correction ▼ [1708]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Dans chaque cas, appliquer le théorème de convergence dominée. Pour le dernier exemple, on pourra utiliser qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Dériver f_n pour déterminer le point où le maximum est atteint. On pourra utiliser, pour majorer ce maximum, l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ valable pour $u > -1$.
2. Application directe du théorème de convergence dominée.

Indication pour l'exercice 3 ▲

On peut utiliser dans chaque cas le théorème de convergence dominée. Attention à la fonction limite. Elle peut avoir des expressions différentes suivant l'intervalle considéré.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Appliquer le théorème de convergence dominée. Attention à la fonction qui majore ! Son expression pourra différer suivant l'intervalle considéré.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Introduire $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n[}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ et lui appliquer le théorème de convergence dominée. On pourra utiliser que $\ln(1+u) \leq u$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

A chaque fois, faire le changement de variables $u = nt$ ou $t = nu$ avant d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Calculer $I_n(x)$ (changement de variable suivi d'intégrations par parties), puis appliquer le théorème de convergence dominée (pour la domination, on pourra utiliser que $\ln(1+x) \leq x$).

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. La suite $(a_n^2+b_n^2)$ ne tend pas vers 0.
2. Calculer une intégrale par le théorème de convergence dominée, et une autre directement. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Commencer par une fonction constante pour "deviner" la limite. Puis découper l'intégrale, autour de 0 est la partie dominante.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Démontrer que $I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Faire un changement de variables $t = x^n$ dans la première intégrale, puis appliquer le théorème de convergence dominée.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. Faire un changement de variables et appliquer le théorème de convergence dominée.

2. Intégrer par parties !

3. g est continue et bornée. Écrire $I_n - f(0)$ sous la forme d'une seule intégrale, faire un changement de variables comme à la première question, puis appliquer le théorème de convergence dominée.

4. g est continue et bornée.

5. Écrire $I_n - f(0)$ sous la forme d'une seule intégrale, faire un changement de variables comme à la première question, puis appliquer le théorème de convergence dominée.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Théorème de convergence dominée, sans difficultés particulières.
2. Écrire $\ell - I_n$ sous une seule intégrale et faire une intégration par parties.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Pour conjecturer le résultat, faire un développement limité de la fonction à intégrer.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Faire apparaître une série en écrivant, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \text{ et } \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

et appliquer le(s) théorème(s) d'inversion série/intégrale.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Appliquer le théorème d'intégration termes à termes.
2. Appliquer le théorème d'intégration termes à termes.
3.
4. Appliquer le théorème d'intégration termes à termes.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1.
2. Majorer $|R_n(t)|$ en utilisant le critère des séries alternées, puis conclure directement par intégration de l'inégalité, ou par le théorème de convergence dominée.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Commencer par calculer $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}$, puis appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Reconnaitre dans $\frac{1}{e^t-1}$ la somme d'une série géométrique, puis appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
2. idem.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Utiliser le développement en série entière de la fonction cosinus pour écrire $\cos(\sqrt{x})$ comme somme d'une série.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Commencer par développer en série entière $\ln(1-x)$ puis appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pourra calculer l'intégrale qui intervient en effectuant une intégration par parties.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Série géométrique.
2. Calculer l'intégrale !
3. Appliquer le théorème de convergence dominée.
4.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Calcul.
2. Appliquer le théorème de convergence dominée.
3. Prendre la partie réelle de l'égalité précédente, et calculer l'intégrale apparaissant à droite.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1.
2. Comparer à $1/\sqrt{x}$.
3.
4. Intégrer par parties pour trouver une relation entre $I(p,q)$ et $I(p,q-1)$.
5.
6.

Indication pour l'exercice 25 ▲

Il faut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Pour la deuxième intégrale, on pourra se contenter d'une domination sur tout segment de $]0,+\infty[$.

Indication pour l'exercice 26 ▲

1.
2. Appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral. On pourra se ramener à $x \in [a,b]$, avec $a > 0$.

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. La fonction se prolonge par continuité en 0.
2. Appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
3. Pour calculer cette intégrale, on peut écrire $\cos(xt)$ comme $\Re e(e^{ixt})$.
4.

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Trouver un équivalent de l'intégrande en $+\infty$.
2. Intégrale connue.
3. Appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme.
4. Raisonner par récurrence et obtenir en même temps une formule de récurrence pour λ_n.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1.
2. Théorème de convergence dominée ou majoration.
3. Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres.
2. Majorer $\cos t$ par 1...

3. Ecrire $\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x} dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t} dt$.
4. Encadrer (très simplement) le dénominateur.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1.
2.
3.
4. Intégrations par parties.
5. Faire tendre x vers $+\infty$.

Indication pour l'exercice 32 ▲

1.
2. Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral.
3. Factoriser par e^{-t} dans le cosinus hyperbolique, puis faire une intégration par parties.
4. Ecrire

$$\frac{1}{1+e^{2t}} = \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$$

puis reconnaitre une somme géométrique. Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série.

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. Pour la continuité, séparer la majoration sur $]0,1[$ et la majoration sur $]1,+\infty[$.
2. Pour obtenir la formule demandée, couper l'intégrale en deux et faire un changement de variables dans la première intégrale.
3. Séparer l'intégrale en deux parties, entre 0 et 1 et entre 1 et l'infini.
4. Utiliser que F est décroissante.
5. Faire tendre x vers 1 dans l'inégalité précédente pour obtenir une contradiction.

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. Appliquer le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètres.
2. Résoudre l'équation différentielle.

Indication pour l'exercice 35 ▲

1. Dériver $g+f^2$ et prouver que la dérivée est nulle.
2. Faire tendre x vers $+\infty$.

Indication pour l'exercice 36 ▲

1. Appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres, puis le théorème de convergence dominée.
2. Appliquer le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètres.
3.

Indication pour l'exercice 37 ▲

1.
2. Utiliser $\cos^2 + \sin^2\theta = 1$ et une intégration par parties.
3. Développer $\cos(u)$ en série entière, puis permuter

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Raisonner par équivalence en 0, et par majoration en $+\infty$.
2. Appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.

3.
4. Appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.
5. Intégrer par parties.
6. Utiliser le calcul de la dérivée seconde de Γ.
7. Convexité. Utiliser le théorème de convergence dominée.
8. Convexité.
9. Utiliser le théorème de convergence dominée.
10. Faire le changement de variables $u = t/n$.
11.

Indication pour l'exercice 39 ▲

1. Il suffit d'appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
2. Faire un changement de variables du type $u = xt$.
3. Faire le même changement de variables.

Indication pour l'exercice 40 ▲

1. Ecrire
$$\int_0^X f(t)e^{-yt}dt = \int_0^X f(t)e^{-xt}e^{-(y-x)t}dt$$
et faire une intégration par parties.
2.
3. Appliquer le théorème de convergence dominée.

Indication pour l'exercice 41 ▲

1. Appliquer le théorème (ici, on travaille sur un segment, c'est le cas facile).
2. La limite recherchée est celle de $F(\alpha)^{1/\alpha}$ qu'on écrit à l'aide de l'exponentielle. Faire ensuite un développement limité.

Indication pour l'exercice 42 ▲

1. Faire un changement de variables dans le théorème fondamental du calcul intégral. Puis appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégral.
2. Utiliser la formule de Taylor reste intégral, puis la même méthode qu'à la question précédente.

Indication pour l'exercice 43 ▲

Trouver un changement de variables pour se ramener à une intégrale sur un segment.

Correction de l'exercice 1 ▲

Dans chaque cas, on va appliquer le théorème de convergence dominée.

1. Pour tout $t \in [0, \pi/4[$, on a $(\tan t)^n \to 0$ car $\tan t \in [0,1[$. De plus, pour tout $t \in [0, \pi/4[$, on a $|\tan t| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est une fonction intégrable sur $]0, \pi/4[$. Toutes les fonctions invoquées étant continues par morceaux, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt = \int_0^{\pi/4} 0 dt = 0.$$

Remarquons que le fait que $\big((\tan(\pi/4))^n\big)$ ne tende pas vers 0 ne pose pas de problèmes. Il suffit d'avoir la convergence simple sur l'intervalle ouvert.

2. Remarquons que l'intégrale considérée converge pour $n \geq 2$ par comparaison à une intégrale de Riemann. Pour tout $t > 1$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

De plus, pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$, on a

$$\left|\frac{1}{1+t^n}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction à droite de l'inégalité est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt = 0.$$

Remarquons qu'on peut aussi très bien prouver ce fait sans utiliser le théorème de convergence dominée. En effet, il suffit d'écrire, pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et $+\infty$ pour trouver

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \leq \frac{1}{n-1}$$

et on conclut par le théorème des gendarmes.

3. Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors $\frac{-x}{n} \to 0$ si $n \to +\infty$ et par composition des limites $\exp(-x/n) \to \exp(0) = 1$ si $n \to +\infty$. On a donc, pour tout tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, soit $x \in]0, +\infty[$ et $n \geq 1$. Alors $-x/n \leq 0$ et donc $\exp(-x/n) \leq 1$. Donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \geq 1$,

$$\left|\frac{\exp(-x/n)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est continue sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{1}{1+x^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x^2}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Pour tout $t \in [0,1[$, (t^n) tend vers 0 et donc, par continuité de f, $(f(t^n))$ tend vers $f(0)$. L'hypothèse de domination dans le théorème de convergence dominée est un peu plus subtile à obtenir, mais le raisonnement est très classique. On remarque que, puisque f est continue sur $[0,1]$, elle y est bornée, disons par $M \geq 0$. Mais alors, pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$|f(t^n)| \leq M$$

et M (qui est une constante) est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt=\int_0^1 f(0)dt=f(0).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Remarquons d'abord que pour tout $n\geq 1$ et tout $x\in[0,1]$, on a $f_n(x)\geq 0$. Pour déterminer le maximum de f_n sur $[0,1]$, on dérive cette fonction :

$$f_n'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^{n-1}\big(1-(n+1)x\big).$$

La dérivée s'annule en $x_n=1/(n+1)$ et donc, pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$0\leq f_n(x)\leq f_n(x_n)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\leq 1.$$

2. On peut maintenant appliquer le théorème de convergence dominée. Par comparaison des fonctions polynômes et puissances, pour tout $x\in]0,1[$, on a $f_n(x)\to 0$. De plus, $|f_n|\leq 1$ et les constantes sont intégrables sur l'intervalle borné $[0,1]$. Par le théorème de convergence dominée, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx=0.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Posons, pour $x>0$, $f_n(x)=\frac{1}{x^n+e^x}$. Alors,

Pour tout $x\in]0,1[$, $f_n(x)\to e^{-x}$ si $n\to+\infty$; $f_n(1)\to\frac{1}{1+e^1}$. Pour tout $x>1$, on a $f_n(x)\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.

De plus, pour tout $n\geq 1$ et tout $x>0$, on a $|f_n(x)|\leq e^{-x}$ et cette fonction est intégrable. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+e^x}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}.$$

2. Pour tout $x\in]0,1[$, $f_n(x)\to e^{-x}$ si $n\to+\infty$;
3. $f_n(1)\to\frac{1}{1+e^1}$.
4. Pour tout $x>1$, on a $f_n(x)\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.
5. Posons $g_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$. On écrit

$$\sqrt[n]{1+x^n}=\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^n)\right).$$

Pour $x\in]0,1]$, on en déduit que $g_n(x)\to\frac{1}{1+x^2}$. Pour $x>1$, on a

$$\sqrt[n]{1+x^n}=\exp\left(\frac{1}{n}n\ln(x)+\frac{1}{n}\ln(1+x^{-n})\right)\to x.$$

De plus, on a pour tout $x>0$, $|g_n(x)|\leq\frac{1}{1+x^2}$, fonction qui est intégrable sur $]0,+\infty[$, et donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}g_n(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)x}.$$

Reste à calculer chaque intégrale. La première ne pose pas de problèmes, elle vaut $\pi/4$. Pour la seconde, on écrit

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{dx}{(1+x^2)x} &= \int_1^X \frac{dx}{x} - \int_1^X \frac{x}{1+x^2}dx\\ &= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^X\\ &= \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1+X^2) + \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

On fait alors tendre X vers $+\infty$, et on remarque que

$$\ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1+X^2) = \ln(X) - \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(1+X^{-2}) \longrightarrow_{X\to+\infty} 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Posons $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$. Pour $x > 0$, $\arctan(nx) \to \pi/2$. Pour $x \in]0,1[$, $\exp(-x^n) \to 1$, pour $x = 1$, $\exp(-x^n) \to e^{-1}$ tandis que pour $x > 1$, $\exp(-x^n) \to 0$. De plus, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

avec $g(x) = \pi/2$ si $x \in [0,1]$ et $g(x) = \pi e^{-x}/2$ si $x > 1$. La fonction g étant intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}}$. Alors
Pour $x \in]0,1[$, $f_n(x) \to 0$; $f_n(1) = 1/2$; Pour $x > 1$, $f_n(x) \to 1/x^2$.
Reste à trouver une fonction dominante intégrable pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée. Posons $g(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x > 1$. Alors g est intégrable sur $[1,+\infty[$ et il est facile de vérifier que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$. Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

3. Pour $x \in]0,1[$, $f_n(x) \to 0$;
4. $f_n(1) = 1/2$;
5. Pour $x > 1$, $f_n(x) \to 1/x^2$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On pose $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n[}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour n assez grand, $x \in [0,n[$. On a alors

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(n\left(-\frac{x}{n}+o(1/n)\right)\right)\\ &= \exp\left(-x+o(1)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) \to e^{-x}$. De plus, puisque $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in]-1,+\infty[$, on obtient

$$0 \leq f_n(x) \leq \exp\left(n\left(-\frac{x}{n}\right)\right) \leq e^{-x}$$

(cette inégalité est valable même si $x \notin [0,n[$). Puisque la fonction e^{-x} est intégrable, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

En réalité, ici, l'usage du théorème de convergence dominée est complètement inutile. L'intégrale se calcule très facilement

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \left[-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n = \frac{n}{n+1},$$

quantité qui tend bien évidemment vers 1.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Effectuons le changement de variables $t = nu$. Alors,

$$\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt = \int_0^1 f(nu)du.$$

Pour tout $u \in]0,1]$, on a $f(nu) \to \ell$. De plus, f étant continue sur $\mathbb{R}_+$ et admettant une limite en l'infini, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$ et tout $u > 0$, on a $|f(nu)| \leq M$. M, une constante, étant intégrable sur l'intervalle borné $]0,1[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt = \int_0^1 \ell dt = \ell.$$

2. La méthode est similaire. Le changement de variables $u = nt$ donne

$$\int_0^{+\infty} nf(t)e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} f(u/n)e^{-u}du.$$

Soit M un majorant de $|f|$. Alors pour tout $n \geq 1$ et tout $u \geq 0$, on a $|f(u/n)e^{-u}| \leq Me^{-u}$ qui est une fonction intégrable. De plus, par continuité de f en 0, pour tout $u > 0$, on a $f(u/n)e^{-u} \to f(0)e^{-u}$. Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} nf(t)e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}du = f(0).$$

Correction de l'exercice 7 ▲

On commence par calculer $I_n(x)$: par un changement de variables, puis par des intégrations par parties successives, on trouve

$$\begin{aligned} I_n(x) &= n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du \\ &= n^x \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x du \\ &= n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^1 u^{x+n-1}du \\ &= n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \end{aligned}$$

On voit donc que pour résoudre l'exercice, il suffit de prouver que $I_n(x)$ converge, à x fixé, vers $\Gamma(x)$. Introduisons $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. Alors :

Pour chaque t, on a $f_n(t) \to e^{-t}t^{x-1}$; De plus, utilisant que $\ln(1+x) \leq x$ (car le logarithme est concave), on a

$$\ln(1-t/n) \leq -\frac{t}{n}.$$

Ainsi

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$$

pour $|t| \leq n$. On en déduit que

$$|f_n(t)| \leq e^{-t}t^{x-1},$$

fonction qui est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne le résultat.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Supposons que (a_n) ou (b_n) ne tend pas vers 0. Alors la suite $(a_n^2+b_n^2)$ ne tend pas vers 0, et on peut trouver $\delta > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que $a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2 \geq \delta$ pour tout entier k. Cette suite convient alors.

2. Remarquons que, d'une part, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|f_k(x)| \leq \frac{(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)\big(\sin^2(n_kx)+\cos^2(n_kx)\big)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2} = 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f_k(x)dx = 0$. D'autre part, on a aussi

$$\int_a^b f_k(x) = \frac{1}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\int_a^b \big(a_{n_k}^2\sin^2(n_kx)+b_{n_k}^2\cos^2(n_kx)+a_{n_k}b_{n_k}\sin(2n_kx)\big)dx.$$

Mais, par un calcul direct,

$$\int_a^b a_{n_k}^2\sin^2(n_kx)dx = \frac{a_{n_k}^2(b-a)}{2} + a_{n_k}^2 o(1),$$
$$\int_a^b b_{n_k}^2\cos^2(n_kx)dx = \frac{b_{n_k}^2(b-a)}{2} + b_{n_k}^2 o(1),$$

tandis que

$$\int_a^b a_{n_k}b_{n_k}\sin(2n_kx)dx = a_{n_k}b_{n_k}o(1).$$

Mais $|a_{n_k}b_{n_k}| \leq a_{n_k}^2+b_{n_k}^2$ et donc on peut aussi écrire

$$\int_a^b a_{n_k}b_{n_k}\sin(2n_kx)dx = (a_{n_k}^2+b_{n_k}^2)o(1).$$

On obtient donc

$$\int_a^b f_k(x) = \frac{(b-a)}{2} + o(1)$$

ce qui contredit que la limite est nulle puisque $a \neq b$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Commençons par observer que, pour chaque entier n, l'intégrale est bien définie. En effet, si $C > 0$ est tel que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \geq 0$, alors on a

$$\left|\frac{a_nf(x)}{a_n^2+x^2}\right| \leq \frac{Ca_n}{a_n^2+x^2}$$

et la fonction à droite de l'inégalité est intégrable (le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, et elle est équivalente au voisinage de $+\infty$ à Ca_n/x^2). Déterminons maintenant la limite en utilisant le théorème de convergence dominée. Pour cela, on réalise le changement de variables $x = a_nu$. L'intégrale est alors égale à

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(a_nx)}{1+x^2}dx.$$

Posons $g(x) = \frac{\|f\|_\infty}{1+x^2}$. Alors la fonction g est intégrable sur $[0,+\infty[$ et de plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$,

$$\left|\frac{f(a_nx)}{1+x^2}\right| \leq g(x).$$

En outre, pour tout $x \geq 0$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n x)}{1+x^2} = \frac{f(0)}{1+x^2}.$$
D'après le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Remarquons pour commencer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{nx^2+\sqrt{x}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. De plus, elle est équivalente en $+\infty$ (quand x tend vers $+\infty$!) à $\frac{1}{nx^2}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, I_n est bien définie. Pour conjecturer un équivalent de I_n, on peut remarquer que, à $x \geq 1$ fixé,
$$\frac{1}{nx^2+\sqrt{x}} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx^2}.$$
Il est donc "raisonnable" de conjecturer que
$$I_n \sim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{nx^2} = \frac{1}{n}.$$
C'est parti ! On a, pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{I_n}{\frac{1}{n}} = \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2+\sqrt{x}}dx.$$
Posons, pour $x \geq 1$ et $n \geq 1$,
$$f_n(x) = \frac{n}{nx^2+\sqrt{x}}.$$
Alors f_n est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ et, pour tout $x \geq 1$, $f_n(x) \to \frac{1}{x^2}$ lorsque $n \to +\infty$. De plus, pour tout $x \geq 1$ et tout $n \geq 1$, on a
$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{nx^2} = \frac{1}{x^2}$$
et cette dernière fonction (qui ne dépend plus de n) est intégrable. Ainsi, par le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1.$$
Ceci démontre que $I_n \sim_{+\infty} 1/n$.

Correction de l'exercice 11 ▲

On va appliquer le théorème de convergence dominée, mais après le changement de variables $t = x^n$ dans la première intégrale. On a alors
$$n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}t^{1/n}dt.$$

Posons alors, pour $n \geq 1$ et $t \geq 1$, $f_n(t) = \frac{e^{-t}}{t}t^{1/n}$. Il est clair que, pour tout $t \geq 1$, $f_n(t) \to \frac{e^{-t}}{t}$. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il faut encore vérifier l'hypothèse de domination. Mais, tout $t \geq 1$ et $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{t^{1/n}}{t} = \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}} \leq 1$. Autrement dit, on a prouvé que, pour tout $t \geq 1$ et tout $n \geq 1$, on a
$$|f_n(t)| \leq e^{-t}.$$
Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Il est donc légitime d'appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt,$$

ce qui est le résultat voulu.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Effectuons le changement de variables $u = nx$. Alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)e^{-u}du.$$

Mais, pour tout $u > 0$, $f(u/n)e^{-u}$ tend vers $f(0)e^{-u}$ lorsque n tend vers l'infini (par continuité de f en 0). De plus, on a pour tout $n \geq 1$ et tout $u > 0$,

$$|f(u/n)e^{-u}| \leq \|f\|_\infty e^{-u}.$$

Cette dernière fonction étant intégrable, on en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}du = f(0).$$

2. Les hypothèses nous invitent à effectuer une intégration par parties, en dérivant $u \mapsto f(u/n)$ et en intégrant $u \mapsto e^{-u}$. C'est légitime car $\lim_{n\to+\infty} f(u/n)e^{-u} = 0$. On obtient

$$I_n - f(0) = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} f'(u/n)e^{-u}du.$$

En appliquant un raisonnement identique à celui de la première question (ou même en appliquant directement le résultat de la première question à f'), on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f'(u/n)e^{-u}du = f'(0) \neq 0.$$

Ceci entraine que

$$I_n - f(0) \sim_{+\infty} \frac{f'(0)}{n}.$$

3. g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (parce que f est dérivable en 0) et tend vers 0 en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. Utilisons que $f(0) = n\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx$ pour écrire

$$\begin{aligned} I_n - f(0) &= n\int_0^{+\infty} (f(x) - f(0))e^{-nx}dx \\ &= \int_0^{+\infty} (f(u/n) - f(0))\, e^{-u}du \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} ue^{-u}du. \end{aligned}$$

Or, pour tout $u > 0$, on a

$$\frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} ue^{-u} \to f'(0)ue^{-u}.$$

De plus, en notant M un majorant de $|g|$, on a

$$\left|\frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} ue^{-u}\right| = |g(u/n)|ue^{-u} \leq Mue^{-u}$$

et cette dernière fonction est intégrable. On déduit donc du théorème de convergence dominée que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} ue^{-u}du \to \int_0^{+\infty} f'(0)ue^{-u}du = f'(0),$$

ce qui redémontre le résultat de la question précédente sous des hypothèses plus faibles.

4. g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (parce que f est dérivable en 0) et tend vers 0 en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

5. Utilisons que $f(0) = n\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx$ pour écrire

$$\begin{aligned} I_n - f(0) &= n\int_0^{+\infty}(f(x)-f(0))e^{-nx}dx \\ &= \int_0^{+\infty}\left(f(u/n)-f(0)\right)e^{-u}du \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{f(u/n)-f(0)}{u/n}ue^{-u}du. \end{aligned}$$

Or, pour tout $u > 0$, on a

$$\frac{f(u/n)-f(0)}{u/n}ue^{-u} \to f'(0)ue^{-u}.$$

De plus, en notant M un majorant de $|g|$, on a

$$\left|\frac{f(u/n)-f(0)}{u/n}ue^{-u}\right| = |g(u/n)|ue^{-u} \leq Mue^{-u}$$

et cette dernière fonction est intégrable. On déduit donc du théorème de convergence dominée que

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(u/n)-f(0)}{u/n}ue^{-u}du \to \int_0^{+\infty} f'(0)ue^{-u}du = f'(0),$$

ce qui redémontre le résultat de la question précédente sous des hypothèses plus faibles.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1.$$

De plus, pour tout $t \in]0,1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$\left|\frac{1}{1+t^n}\right| \leq 1$$

et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1[$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 1dt = 1.$$

2. On a

$$\ell - I_n = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^n}\right)dt = \int_0^1\frac{t^n}{1+t^n}dt = \int_0^1 t\times\frac{t^{n-1}}{1+t^n}dt.$$

On réalise une intégration par parties, et on trouve que

$$\ell - I_n = \frac{1}{n}\left[t\ln(1+t^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+t^n)dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+t^n)dt.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\ln(1+t^n)dt = 0,$$

ce qui se redémontre ou bien en majorant ou bien par le théorème de convergence dominée. On en conclut que

$$\ell - I_n \sim_{n\to+\infty}\frac{\ln 2}{n}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$, $x \mapsto e^{-x}/(x+n)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$ car négligeable devant e^{-x}. Pour $x \in]0,+\infty[$ fixé, et pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\frac{e^{-x}}{n+x} &= \frac{e^{-x}}{n} \times \frac{1}{1+\frac{x}{n}}\\ &= \frac{e^{-x}}{n}\left(1-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{e^{-x}}{n} - \frac{xe^{-x}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, ceci nous amène à conjecturer que

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \times \frac{1}{n} - \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si on calcule les deux intégrales précédentes (la première directement, la seconde par intégration par parties), on trouve

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1.$$

On conjecture donc que

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Formons la différence :

$$\begin{aligned}I_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n}dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n}dx + \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{n}^2 dx\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n^2(n+x)} \times \left(n^2 - n(n+x) + (n+x)x\right)dx\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{n^2(n+x)}dx.\end{aligned}$$

Reste à démontrer que cette dernière intégrale est négligeable devant $1/n^2$. Ceci peut se faire facilement par le théorème de convergence dominée, ou en remarquant que

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{n^2(n+x)}dx \leq \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Pour $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln(t)}{t-1} = \frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\ln(t))t^n.$$

On pose, pour $n \geq 0$ et $t \in]0,1[$, $u_n(t) = -\ln(t)t^n$. Pour tout $n \geq 0$, u_n est continue par morceaux sur $]0,1[$ et intégrable sur $I =]0,1[$. De plus $u_n \geq 0$, $\sum_n u_n$ converge simplementsur I vers $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ qui est continue par morceaux sur I. Par le théorème d'inversion séries/intégrales (cas des fonctions positives), on a donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-\ln(t)t^n)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 -\ln(t)t^n dt.$$

Reste à calculer cette dernière intégrale, ce qu'on fait par une intégration par parties. En effet, pour $n \geq 0$,

$$\int_0^1 -(\ln(t))t^n dt = \left[\frac{-t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. Pour $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln(t) t^n.$$

On pose, pour $n \geq 0$ et $t \in]0,1[$, $u_n(t) = (-1)^n \ln(t) t^n$. Pour tout $n \geq 0$, u_n est continue par morceaux sur $]0,1[$ et intégrable sur $I =]0,1[$. De plus $\sum_n u_n$ converge simplement sur I vers $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t+1}$ qui est continue par morceaux sur I. Par le calcul précédent,

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = -\int_0^1 \ln(t) t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion série/intégrale pour en déduire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln(t) t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \ln(t) t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Posons $u_n(x) = x^{2n}(1-x)$. Chaque fonction u_n est positive. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_n u_n(x)$ converge simplement vers

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

(somme géométrique), fonction qui est continue sur $]0,1[$. De plus, on a

$$\int_0^1 u_n(x) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n^2}$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. D'après le théorème d'intégration termes à termes, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

On a également

$$\int_0^1 u_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Tenant compte de la parité des termes, on a finalement

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \ln 2.$$

2. Posons $u_n(x) = x^{2n}(1-x)$. Chaque fonction u_n est positive. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, la série $\sum_n u_n(x)$ converge simplement vers

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

(somme géométrique), fonction qui est continue sur $]0,1[$. De plus, on a

$$\int_0^1 u_n(x) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n^2}$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. D'après le théorème d'intégration termes à termes, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2.$$

3. On a également

$$\int_0^1 u_n(x)dx=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}.$$

Tenant compte de la parité des termes, on a finalement

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)=\ln 2.$$

4. Posons $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}(1-x)$. Pour $x\in]0,1[$, la suite $S_N(x)$ converge vers $x\mapsto\frac{1-x}{1+x^2}$ (toujours par un argument de série géométrique). De plus, on sait d'après la première question que la série $\sum_n\int_0^1\left|(-1)^n x^{2n}(1-x)\right|dx$ est convergente. On peut donc à nouveau appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour obtenir

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx &= \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x)dx\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}(1-x)dx\\ &= \left[\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

On obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

On pourra aussi avoir la correction commentée de l'exercice dans la deuxième partie de cette vidéo :

Dans toute la correction de l'exercice, on posera pour $n\geq 0$ et $t>1$

$$u_n(t)=\frac{1}{t^{3n+3}}.$$

Il est facile de remarquer que

$$\int_1^{+\infty}u_n(t)dt=\frac{1}{3n+2}.$$

1. On voudrait écrire que

$$\int_1^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_1^{+\infty}(-1)^n u_n(t)dt.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme, il faudrait que la série de terme général $\int_1^{+\infty}|(-1)^n u_n(t)|dt$ converge. Mais

$$\int_1^{+\infty}|(-1)^n u_n(t)|dt=\int_1^{+\infty}u_n(t)dt=\frac{1}{3n+2}$$

qui est le terme général d'une série divergente.

2. Par le critère des séries alternées, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \geq 1$, on a

$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{t^{3n+3}}.$$

Pour prouver que $\int_1^{+\infty} R_n(t)dt$ converge vers 0, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (R_n) ou bien remarquer que

$$\int_1^{+\infty} |R_n(t)|dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n+3}} = \frac{1}{3n+2}.$$

Ainsi, si on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k(t)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} &= \int_1^{+\infty} S_n(t)dt + \int_1^{+\infty} R_n(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_1^{+\infty} (-1)^k u_k(t)dt + \int_1^{+\infty} R_n(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+2} + \int_1^{+\infty} R_n(t)dt \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+2}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

On démontre facilement par récurrence que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$. Mais alors, les hypothèses de l'exercice nous disent que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left|a_n x^n e^{-x}\right| dx = \sum_{n\geq 0} |a_n| n!$$

est convergente. De plus, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente sur tout segment $[0,A]$, car on peut majorer $|a_n x^n| \leq |a_n| A^n \leq |a_n| n!$ pourvu que n soit assez grand. La fonction somme est donc continue sur $[0,+\infty[$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration termes à termes et on trouve

$$\sum_{n\geq 0} a_n n! = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} a_n x^n e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n e^{-x}$$

ce qui est le résultat voulu.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: en effet, elle est continue sur $]0,+\infty[$, elle se prolonge par continuité en 0 (car $e^t - 1 \sim_0 t$) et au voisinage de l'infini, elle est équivalente à te^{-t} qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ (elle est négligeable devant t^{-2} par exemple). L'idée ensuite est de reconnaitre dans $\frac{1}{e^t-1}$ la somme d'une série géométrique. Pour cela, on factorise par e^t et on trouve,

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}.$$

Cette égalité est valable dès que $e^{-t} < 1$, c'est-à-dire dès que $t > 0$. Posons $f_n(t) = te^{-nt}$. Alors

Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt}dt = \frac{1}{n^2} \text{ (intégration par parties).}$$

Pour tout $t > 0$, la série $\sum_n f_n(t)$ converge vers $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} te^{-nt}dt = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.$$

2. Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt}dt = \frac{1}{n^2} \text{ (intégration par parties).}$$

3. Pour tout $t>0$, la série $\sum_n f_n(t)$ converge vers $t\mapsto \frac{t}{e^t-1}$.

4. La méthode est exactement identique et les détails sont laissés aux lecteurs. On trouve une somme à partir de 0 et non de 1 car

$$\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} = \sum_{n\geq 0} te^{-(a+nb)t}.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

On sait que, pour tout $u\in\mathbb{R}$, on a $\cos(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$. On en déduit que, pour tout $x\geq 0$, $\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$. Posons, pour $x>0$, $f_n(x)=(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}e^{-x}$. Alors la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge pour tout $x>0$ vers $\cos(\sqrt{x})e^{-x}$. De plus, on a

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\frac{x^n e^{-x}}{(2n)!}dx.$$

Or, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$ et donc

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|dx = \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{(2n)!}$$

et ceci est une série convergente, comme on peut le constater en appliquant le critère de d'Alembert. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on obtient

$$\int_0^{+\infty}\cos(\sqrt{x})e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.$$

Correction de l'exercice 21 ▲

On peut commencer par remarquer que, puisque $\ln(x) =_0 o(1/\sqrt{x})$ et que $\ln(1-x) =_1 o(1/\sqrt{1-x})$, la fonction $x\mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est bien intégrable sur $]0,1[$. De plus, en effectuant un développement en série entière de $\ln(1-x)$, on sait que, pour tout $x\in]0,1[$,

$$\ln(x)\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} -\ln(x)\frac{x^n}{n}.$$

Posons, pour $n\geq 1$ et $x\in]0,1[$, $u_n(x)=-\ln(x)\frac{x^n}{n}$. Alors $u_n(x)\geq 0$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_n(x)|dx &= -\int_0^1 \ln(x)\frac{x^n}{n}dx\\ &= -\left[\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}dx\\ &= \frac{1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_n \frac{1}{n(n+1)^2}$ converge, on déduit du théorème d'intégration terme à terme que

$$\begin{aligned}\int_0^1 -\ln(x)\ln(1-x)dx &= \sum_{n\geq 1} -\int_0^1 \ln(x)\frac{x^n}{n}dx \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Pour $t\in]0,1[$, on reconnait dans $1/(1+t^b)$ la somme de la géométrique de premier terme 1 et de raison $(-t)^b$. Ainsi,

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{a+nb-1}.$$

2. On a

$$\int_0^1 t^{a+nb-1}dt=\frac{1}{a+nb}$$

et donc la série

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^1 t^{a+nb-1}dt$$

est divergente puisque son terme général est équivalent à $1/nb$. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

3. On va néanmoins appliquer le théorème de convergence dominée. En effet, pour tout $t\in]0,1[$, $S_N(t)$ converge vers $t^{a-1}/(1+t^b)$. De plus, on a

$$|S_N(t)|=\left|t^{a-1}\frac{1-(-1)^{N+1}t^{(N+1)b}}{1+t^b}\right|\leq\frac{2t^{a-1}}{1+t^b}.$$

Or, la fonction $t\mapsto t^{a-1}/(1+t^b)$ est intégrable sur $]0,1[$. Elle est en effet continue sur $]0,1]$ et en 0, elle est équivalente à t^{a-1} qui est intégrable au voisinage de 0 (intégrale de Riemann). Le théorème de convergence dominée nous dit donc que :

$$\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt=\int_0^1\lim_{N\to+\infty}S_N(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)dt.$$

4. On calcule la dernière intégrale. En reprenant le calcul effectué à la question 2, on trouve exactement le résultat demandé. En particulier, pour $a=1$ et $b=3$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{t^3+1}.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on peut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples ou demander à un logiciel de calcul formel comme Xcas. On trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Correction de l'exercice 23 ▲

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}$ est continue sur $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). Il n'y a pas de problèmes d'intégrabilité, et il s'agit juste d'un calcul d'intégrales :

$$\begin{aligned}
\Re e\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) &= \int_0^1 \Re e\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right)\\
&= \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta+x^2}dx\\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\right]_0^1\\
&= -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|.
\end{aligned}$$

2. Posons $S_N(x)=\sum_{n=0}^N e^{i(n+1)\theta}x^n$. On a

$$S_N(x)=\frac{e^{i\theta}-e^{i(N+2)\theta}x^{N+1}}{1-e^{i\theta}x}$$

soit

$$|S_N(x)| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}x|}.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,1]$ et ne dépend pas de N. De plus, pour tout $x\in]0,1[$, $S_N(x)$ converge vers $\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta x}}$ lorsque N tend vers $+\infty$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 e^{i(n+1)\theta}x^n dx = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx.$$

Remarquons qu'on ne pouvait appliquer le théorème d'intégration terme à terme ici car la série de terme général $\int_0^1 \left|e^{i(n+1)\theta}x^n\right|dx$ est divergente.

3. La première somme apparaissant ci-dessus vaut encore $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$. Il suffit alors de prendre la partie réelle de l'égalité et d'appliquer le résultat de la première question.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Pour la série, il suffit de remarquer que, pour $m\geq 2$, on a

$$0\leq \frac{1}{m^m}\leq\frac{1}{m^2}.$$

Puisque la série $\sum_m \frac{1}{m^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum_m \frac{1}{m^m}$. Concernant l'intégrale impropre, on commence par écrire

$$f(x)=\frac{1}{x^x}=\exp(-x\ln x).$$

Cette fonction est continue sur $]0,1]$, et se prolonge même par continuité en 0 par $f(0)=1$, car $\lim_{x\to 0}x\ln x=0$. Ainsi, f se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, et en fait on n'a pas affaire à une intégrale impropre.

2. La fonction $x\mapsto x^p(\ln x)^q$ est continue sur $]0,1]$. De plus,

$$\sqrt{x}\times(x^p(\ln x)^q)\to 0 \text{ lorsque } x\to 0.$$

Ainsi, en 0, $x^p(\ln x)^q=o(1/\sqrt{x})$, et comme $1/\sqrt{x}$ est intégrable sur $[0,1]$, il en est de même de $x\mapsto x^p(\ln x)^q$.

3. C'est un calcul de primitive direct, et on trouve $I(m,0)=\frac{1}{m+1}$.

4. Supposons $q\geq 1$. On va intégrer par parties :

$$\int_0^1 x^p(\ln x)^q dx=\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(\ln x)^q\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{p+1}x^{p+1}\frac{q}{x}(\ln x)^{q-1}dx=-\frac{q}{p+1}I(p,q-1).$$

Par une récurrence immédiate, on trouve

$$I(p,q)=(-1)^q\frac{q!}{(p+1)^q}I(p,0)=\frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

5. On écrit à nouveau que $\frac{1}{x^x}=\exp(-x\ln x)$, et on utilise que pour tout réel u, on a $\exp(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!}$. On en déduit que

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln x)^n dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n dx.$$

On peut alors justifier la permutation de la somme et de l'intégrale en utilisant l'un de des arguments suivants :
le théorème de convergence monotone : en effet, la fonction $x\mapsto x^n(-\ln x)^n$ est positive sur $[0,1]$; le théorème de convergence dominée : en effet, pour $N\geq 1$, on utilise que

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln x)^n\right|\leq\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n\leq\frac{1}{x^x},$$

et cette dernière fonction est intégrable.
On peut donc permuter la somme et l'intégrale, et donc

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}I(n,n).$$

6. le théorème de convergence monotone : en effet, la fonction $x\mapsto x^n(-\ln x)^n$ est positive sur $[0,1]$;
7. le théorème de convergence dominée : en effet, pour $N\geq 1$, on utilise que

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln x)^n\right|\leq\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n(-\ln x)^n\leq\frac{1}{x^x},$$

et cette dernière fonction est intégrable.
8. On remplace $I(n,n)$ par sa valeur, puis on fait un changement d'indices :

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^m}.$$

Correction de l'exercice 25 ▲

On va appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres :
1. Posons, pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $f(x,t)=\dfrac{\sin(x^2t^2)}{1+t^2}$. Alors :
pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t>0$, on a

$$|f(x,t)|\leq\frac{1}{1+t^2}.$$

Cette dernière fonction ne dépend plus de x et est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t>0$, on a

$$|f(x,t)|\leq\frac{1}{1+t^2}.$$

Cette dernière fonction ne dépend plus de x et est intégrable sur $]0,+\infty[$.
5. Posons, pour $(x,t)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $g(x,t)=\sin(x^2t^2)e^{-xt}$. On va également appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres, mais on ne va écrire la domination que sur tout segment de $]0,+\infty[$:

pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. soit $0<a<b$. Alors, pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t>0$, on a $-xt\leq -at$ et donc par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a $\exp(-xt)\leq\exp(-at)$. Il vient, pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t>0$,

$$|\sin(x^2t^2)e^{-xt}|\leq e^{-at}.$$

Cette dernière fonction ne dépend plus de x et est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, G est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

6. pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

7. pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

8. soit $0<a<b$. Alors, pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t>0$, on a $-xt\leq -at$ et donc par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a $\exp(-xt)\leq\exp(-at)$. Il vient, pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t>0$,

$$|\sin(x^2t^2)e^{-xt}|\leq e^{-at}.$$

Cette dernière fonction ne dépend plus de x et est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. On remarque d'abord que pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\in]0,+\infty[\mapsto\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Si $x\geq 0$, on a en outre pour tout $t>0$,

$$0\leq\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2},$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$. Par comparaison, $F(x)$ est bien défini. D'autre part, si $x<0$, alors

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}=+\infty,$$

ce qui empêche la fonction d'être intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement, on a prouvé que $D=[0,+\infty[$.

2. Posons, pour $x>0$ et $t>0$, $f(x,t)=\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Alors :

pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. pour tout $k\geq 0$, on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=\frac{(-1)^kt^ke^{-tx}}{1+t^2}.$$

Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$. soit $[a,b]$ un segment contenu dans $]0,+\infty[$. En particulier, on sait que $a>0$. Pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t>0$, on a

$$e^{-tx}\leq e^{-ta}$$

et donc

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq\frac{t^ke^{-ta}}{1+t^2}.$$

Cette dernière fonction ne dépend plus de x et est intégrable sur $]0,+\infty[$, car au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $D\backslash\{0\}$ et, pour tout $x>0$ et tout $k\geq 0$, on a

$$F^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^kt^ke^{-tx}}{1+t^2}dt.$$

3. pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

4. pour tout $k\geq 0$, on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=\frac{(-1)^kt^ke^{-tx}}{1+t^2}.$$

Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$.

5. soit $[a,b]$ un segment contenu dans $]0,+\infty[$. En particulier, on sait que $a>0$. Pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t>0$, on a

$$e^{-tx}\leq e^{-ta}$$

et donc

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \frac{t^k e^{-ta}}{1+t^2}.$$

Cette dernière fonction ne dépend plus de x et est intégrable sur $]0,+\infty[$, car au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$.

Correction de l'exercice 27 ▲

1. Si $x=0$, la fonction à intégrer est identiquement nulle sur $]0,+\infty[$ et est donc intégrable sur $]0,+\infty[$. Si $x\neq 0$, on commence par remarquer que la fonction $t\mapsto \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\sin(xt)\sim_{t\to 0} xt$ et donc la fonction $t\mapsto \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ se prolonge par continuité en 0. Ainsi prolongée, la fonction $t\mapsto \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et on a pour $t\geq 1$,

$$\left|\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right| \leq e^{-t}.$$

La fonction e^{-t} étant intégrable sur $[0,+\infty[$, on en déduit que la fonction $t\mapsto \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Posons, pour $x\in\mathbb{R}$ et $t>0$, $f(x,t)=\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$. Alors, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\cos(xt)e^{-t}.$$

C'est donc une fonction continue des deux variables x et t. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq e^{-t}$$

et cette dernière fonction est intégrable. On en déduit, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vaut

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt.$$

3. On peut calculer cette dernière intégrale en écrivant $\cos(xt)$ comme $\Re e(e^{ixt})$. On a donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \Re e\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt\right)\\ &= \Re e\left(\frac{1}{1-ix}\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

4. En intégrant F' entre 0 et x, on trouve que

$$F(x)-F(0)=\arctan(x)-\arctan(0)\implies F(x)=\arctan(x).$$

Correction de l'exercice 28 ▲

1. Pour $x>0$, la fonction $t\mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{(t^2+x^2)^n}\sim\frac{1}{t^{2n}}.$$

Par comparaison, la fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Il s'agit d'une intégrale connue :

$$I_1(x)=\left[\frac{1}{x}\arctan(t/x)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2x}.$$

3. Posons $f_n(x,t) = \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$ qui est de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. De plus,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = \frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

Fixons maintenant $0 < a < b$ et supposons $x \in [a,b]$. Alors,

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend pas de x pourvu que $x \in [a,b]$), est intégrable sur $]0,+\infty[$, et donc I_n est de classe C^1 sur $[a,b]$. Puisque a et b sont arbitraires, I_n est C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x)$$

pour $x > 0$.

4. On va prouver ce résultat par récurrence sur n, et on va en même temps obtenir une relation de récurrence pour la suite (λ_n). Le résultat est vrai pour $n = 1$, avec $\lambda_1 = \pi/2$. Supposons-le démontré au rang n, et prouvons-le au rang $n+1$. Pour $x > 0$, d'après la question précédente,

$$I_{n+1}(x) = \frac{-1}{2nx} \times \frac{-(2n-1)\lambda_n}{x^{2n}} = \frac{\lambda_{n+1}}{x^{2n+1}}$$

avec $\lambda_{n+1} = \frac{(2n-1)\lambda_n}{2n}$. On en déduit (classiquement) que

$$\lambda_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}\pi.$$

Correction de l'exercice 29 ▲

1. Pour tout $x > 0$, la fonction $(x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, on a, pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$,

$$\left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc l'intégrale définissant $F(x)$ converge. D'ailleurs, elle converge aussi pour $x = 0$.

2. On peut appliquer le théorème de convergence dominée ou, plus simplement, remarquer que, pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}.$$

On en déduit, par intégration de l'inégalité, que

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$$

d'où la limite désirée d'après le théorème des gendarmes.

3. Posons $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Alors, pour tous $x,t > 0$, la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x d'ordre 1 et 2 qui sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

Ces dérivées partielles sont continues comme fonctions des deux variables x et t. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (on peut majorer sa valeur absolue par e^{-xt} qui est intégrable). De plus, fixons $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t > 0$, on a

$$\left|t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-at}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$. Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ avec

$$F''(x)=\int_0^{+\infty}t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt.$$

En particulier, pour tout $x>0$, on a

$$F''(x)+F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}.$$

Correction de l'exercice 30 ▲

1. Posons $u(x,t)=\frac{\cos(t)}{t+x}$, définie et continue sur $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,\pi/2]$ (c'est une fonction continue sur un segment). Cette fonction admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\frac{-\cos(t)}{(t+x)^2}.$$

Cette dérivée partielle est elle-même continue sur $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$. De plus, fixons $[a,b]\subset]0,+\infty[$ (en particulier, $a>0$). Alors pour tout $x\in[a,b]$ et tout $t\in[0,\pi/2]$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{1}{(a+t)^2}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $[0,\pi/2]$. Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on en déduit que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que

$$f'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{-\cos(t)}{(t+x)^2}dt\leq 0.$$

Ainsi, f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

2. Il n'est pas besoin d'appliquer un théorème sophistiqué. Ici, on a en effet

$$0\leq f(x)\leq\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt=\ln\left(\frac{x+\pi/2}{x}\right)\to 0.$$

Par le théorème d'encadrement, f tend vers 0 en $+\infty$.

3. Par encadrement, on a donc

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{t+x}dt\leq f(x)\leq\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt,$$

soit

$$-\ln(x)+\ln(x+\pi/2)-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{t+x}dt\leq f(x)\leq-\ln(x)+\ln(x+\pi/2).$$

Le seul terme qui pose encore problème est l'intégrale. Mais, on remarque que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{t+x}dt\leq\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{t}dt=\frac{\pi^2}{8}.$$

Il vient

$$-\ln(x)+\ln(x+\pi/2)-\frac{\pi^2}{16}\leq f(x)\leq-\ln(x)+\ln(x+\pi/2).$$

Il suffit ensuite de diviser par $-\ln x$ et de faire tendre x vers 0 pour en déduire le résultat voulu.

4. Il suffit d'encadrer le plus simplement possible le dénominateur. En effet, on a

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x+\pi/2}dt\leq f(x)\leq\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}dt.$$

Il vient
$$\frac{1}{x+\pi/2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$
et donc
$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

Correction de [**l'exercice 31 ▲**]

1. Définissons sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,
$$f(x,t) = \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)$$
qui est une fonction continue. Si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, on a
$$f(x,t) \to (b-a)$$
lorsque t tend vers 0 (faire un DL par exemple). Ainsi, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge par continuité en 0. De plus, au voisinage de $+\infty$,
$$t^2 f(x,t) \to 0 \implies f(t,x) =_{+\infty} o(1/t^2).$$
Ainsi, $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $F(x)$ est bien définie.

2. La fonction f est de classe C^1, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (e^{-bt}-e^{-at})\sin(xt).$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-bt}+e^{-at}$$
et cette dernière fonction, qui ne dépend plus de x, est intégrable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, F est C^1 et
$$F'(x) = \int_0^{+\infty}(e^{-bt}-e^{-at})\sin(xt)dt.$$
Or, il est facile de voir que, pour tout $c > 0$,
$$\int_0^{+\infty} e^{-ct}\sin(xt)dt = \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{(-c+ix)t}dt\right) = \frac{x}{c^2+x^2}.$$
On en déduit que
$$F'(x) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}.$$

3. Il suffit d'intégrer la relation précédente.

4. La relation demandée est une simple intégration par parties (généralisée), justifiée par la convergence de toutes les intégrales en jeu (faites-le). En particulier, démontrez la convergence de $\int_0^{+\infty}|\psi'(t)|dt$.

5. Faisons tendre x vers $+\infty$. On a d'une part,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2} = 1$$
et donc par composition des limites
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = C.$$
D'autre part, on a
$$|F(x)| \leq \frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty}|\psi'(t)|dt,$$
d'où l'on tire $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. On en déduit que $C = 0$.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. La fonction cosh ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)}$ est définie sur $[0,+\infty[$. De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$\left|\frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)}\right| \leq \frac{1}{e^{2t}} = e^{-2t}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto e^{-2t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)}dt$ est convergente et la fonction γ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Nous allons appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres. La fonction $(x,t) \mapsto \frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$. De plus, nous avons prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$, on a

$$\left|\frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)}\right| \leq e^{-2t},$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction γ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On commence par remarquer que

$$\cosh^2(t) = \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{-2t}}{4} \times (e^{2t}+1)^2$$

et donc

$$\gamma(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2tx)\frac{2e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}.$$

Effectuons une intégration par parties en posant

$$u(t) = \frac{-1}{e^{2t}+1} \text{ et } v(t) = 2\cos(2tx)$$

de sorte que

$$u'(t) = \frac{2e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} \text{ et } v'(t) = -4x\sin(2tx).$$

Puisque $u(t)v(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ et que uv' et $u'v$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ (il faut encore le justifier pour uv'...), la formule d'intégration par parties donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - 4x\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2t}+1}\sin(2tx)dt\\ &= 1 - 4x\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2t}+1}\sin(2tx)dt.\end{aligned}$$

4. On commence par écrire que, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{2t}} &= \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\\ &= e^{-2t}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(e^{-2t})^k\\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k e^{-2kt}.\end{aligned}$$

Fixons ensuite $x \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin(2xt)e^{-2kt}dt &= \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{(-2k+2ix)t}dt\right)\\ &= \Im m\left(\frac{-1}{-2k+2ix}\right)\\ &= \Im m\left(\frac{2k+2ix}{4(k^2+x^2)}\right)\\ &= \frac{x}{2(k^2+x^2)}\end{aligned}$$

On peut donc conclure si on peut permuter la somme et l'intégrale. C'est un peu délicat. Posons (à x toujours fixé) $f_N(t) = \sum_{k=1}^N (-1)^k e^{-2kt}\sin(xt)$. On souhaite prouver que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_N(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} f_N(t)dt.$$

Pour cela, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}|f_N(t)| &\leq \left|\sum_{k=1}^N (-1)^k e^{-2kt}\right|\\ &\leq \left|\frac{e^{-2t}-(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right|\\ &\leq \frac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\\ &\leq \frac{2}{1+e^{2t}}.\end{aligned}$$

Or cette dernière fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$, et donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui nous permet de conclure que

$$\gamma(x) = 1+2x^2\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k^2+x^2}.$$

Correction de l'exercice 33 ▲

1. Remarquons pour commencer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On doit juste traiter le problème au voisinage de $+\infty$. Mais, si $x < 0$, t^x tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\frac{1}{1+t^x} \to_{t\to+\infty} 1$$

et l'intégrale impropre ne converge pas au voisinage de $+\infty$. Si $x = 0$, la fonction est constante et son intégrale ne converge pas. Enfin, si $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+t^x} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^x}.$$

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}$ converge si et seulement si $x > 1$, et par comparaison à une fonction positive, l'intégrale est convergente si et seulement si $x > 1$. Autrement dit, le domaine de définition de f est $]1,+\infty[$. Fixons ensuite $[a,b] \subset]1,+\infty[$. Alors si $x \in [a,b]$, on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^b}.$$

De même, si $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^a}.$$

La fonction $t\mapsto \frac{1}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0,1]$ et la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on déduit du théorème de continuité des intégrales à paramètres que f est continue sur $]1,+\infty[$.

2. Posons $u(x,t)=\frac{1}{1+t^x}$, définie sur $]1,+\infty[\times]0,+\infty[$. Alors u admet une dérivée partielle par rapport à x définie sur $]1,+\infty[\times]0,+\infty[$ et donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\frac{-t^x\ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Cette dérivée partielle est continue des deux variables. Si on utilise

$$\left|\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\right|\leq\frac{1+t^x}{(1+t^x)^2}=\frac{1}{1+t^x}$$

on trouve que, pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et tout $x\in[a,b]$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{|\ln t|}{1+t^b}$$

si $t\in]0,1[$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{|\ln t|}{1+t^a}$$

si $t\geq 1$. La fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0,1]$ et la fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on déduit du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x>1$,

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{-t^x\ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Pour obtenir la formule demandée par l'énoncé, on coupe l'intégrale en deux, entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$, puis on fait le changement de variables $u=1/t$ dans la première intégrale. Puisque pour tout $t>1$ et tout $x>1$,

$$\frac{t^x\ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\leq 0$$

on en déduit que f est décroissante sur $]1,+\infty[$.

3. On va séparer l'étude de l'intégrale entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$. On a d'une part, pour tout $t\in]0,1[$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+t^x}=1.$$

De plus, pour tout $t\in]0,1[$ et tout $x>0$,

$$\left|\frac{1}{1+t^x}\right|\leq 1$$

et 1 est intégrable sur $]0,1[$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{1+t^x}dt=\int_0^1 1dt=1.$$

Pour l'intégrale entre 1 et $+\infty$, on peut également utiliser le théorème de convergence dominée, ou plus simplement on peut majorer : pour $x>1$ et $t\geq 1$, on a

$$0\leq\frac{1}{1+t^x}\leq\frac{1}{t^x}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et $+\infty$, et on trouve

$$0\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^x}dt\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x}=\frac{1}{x-1}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^x}dt=0.$$

Finalement, on en conclut que F tend vers 1 en $+\infty$.

4. Si F admet une limite ℓ en 1^+, alors puisque F est décroissante, pour tout $x>1$, on a

$$F(x)\leq \ell.$$

Mais comme on intègre une fonction positive, on en déduit que, pour tout $A>1$, on a

$$\int_1^A \frac{1}{1+t^x}dt \leq F(x)\leq \ell.$$

5. Faisons tendre x vers 1 dans l'inégalité précédente. Puisque, pour tout $t\in[1,A]$, $\frac{1}{1+t^x}$ tend vers $\frac{1}{1+t}$ lorsque x tend vers 1, et que

$$\left|\frac{1}{1+t^x}\right|\leq 1$$

pour tout $t\in[1,A]$ et $x>1$, avec 1 fonction intégrable sur le segment $[1,A]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$\int_1^A \frac{dt}{1+t}\leq \ell.$$

Ceci est vérifié pour tout $A>1$. Puisque $t\mapsto \frac{1}{1+t}$ est positive sur $[1,A]$, on en déduit que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t}$ est convergente. Ceci est faux par comparaison à une intégrale de Riemann divergente. C'est donc que l'hypothèse que F admet une limite finie ℓ en 1^+ est fausse. Mais F est décroissante, et donc admet une limite en 1^+ qui peut être finie ou égale à $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to 1^+}F(x)=+\infty$.

Correction de l'exercice 34 ▲

1. On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|e^{-itx}e^{-at^2}|=e^{-at^2}$$

qui est une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $a>0$. Ceci démontre à la fois que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et aussi que F est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a majoré l'intégrande (qui est continue) par une fonction intégrable ne dépendant pas de x. De plus, la fonction $(x,t)\mapsto e^{-itx}e^{-at^2}$ est de classe C^1, et sa dérivée partielle par rapport à x est $(x,t)\mapsto -ite^{-itx}e^{-at^2}$. Cette fonction vérifie

$$|-ite^{-itx}e^{-at^2}|\leq |t|e^{-at^2}$$

et la fonction qui est à droite de l'inégalité est intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x. Ceci prouve que F est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$F'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx}e^{-at^2}dt.$$

Une intégration par parties permet de se ramener à F :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{i}{2a}e^{-at^2}e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{2a}e^{-at^2}(-ixe^{-itx})dt\\ &= -\frac{x}{2a}F(x).\end{aligned}$$

2. On résout l'équation différentielle vérifiée par F : $F(x)=F(0)e^{-x^2/4a}$. De plus,

$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Correction de l'exercice 35 ▲

1. La fonction $u:(x,t)\mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ admet une dérivée partielle par rapport à x valant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=-2x(1+t^2)\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}=-2xe^{-x^2}e^{-(tx)^2}.$$

Cette dérivée partielle est continue comme fonction des deux variables sur $\mathbb{R}\times[0,1]$. De plus, si $[a,b]\subset\mathbb{R}$, alors $\frac{\partial u}{\partial x}$ est bornée sur le compact $[a,b]\times[0,1]$ disons par le réel $M>0$. Comme M est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1[$, on en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que g est dérivable et que l'on a

$$g'(x)=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}dt.$$

De plus, par le théorème fondamental du calcul intégral, f est dérivable, de dérivée e^{-x^2}. Posons alors $h=g+f^2$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{(-tx)^2}dt+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt=0 \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables $u=tx$. Ainsi, $h'=0$ sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction h est constante. De plus,

$$h(0)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\arctan(1)=\frac{\pi}{4},$$

ce qui prouve le résultat.

2. On va faire tendre x vers $+\infty$, et prouver que $g(x)\to 0$ lorsque $x\to+\infty$. C'est très facile en utilisant le théorème de convergence dominée. On peut aussi remarquer que, pour tout $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}$, on a

$$0\leq\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\leq e^{-x^2}$$

et donc

$$0\leq g(x)\leq\int_0^1 e^{-x^2}dt=e^{-x^2}.$$

Par le théorème des gendarmes, ceci prouve que g tend vers 0 en $+\infty$. D'après l'équation précédente, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}f^2(x)=\frac{\pi}{4}$. Puisque I est positive (comme intégrale d'une fonction positive), on en déduit que $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 36 ▲

---

1. Pour $x\geq 0$ et $t\geq 0$, on a

$$\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right|\leq\frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction apparaissant dans la partie droite de l'inégalité est intégrable sur $[0,+\infty[$ et ne dépend pas de x. De plus, la fonction $f:(x,t)\mapsto\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[^2$. On en déduit que F définit une fonction continue sur $[0,+\infty[$. De plus, on peut appliquer le théorème de convergence dominée (toujours grâce à l'hypothèse de domination écrite plus haut) et on a

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}0dt=0.$$

2. f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-e^{-x(1+t^2)}.$$

Fixons $a>0$. Alors, pour tout $x\in[a,+\infty[$,

$$\left|-e^{-x(1+t^2)}\right|\leq e^{-a(1+t^2)}$$

et cette dernière fonction est intégrable et ne dépend pas de $x \in [a,+\infty[$. De plus, $(x,t) \mapsto -e^{-x(1+t^2)}$ est continue. On en déduit que F est de classe C^1 sur tout intervalle $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, sa dérivée étant donnée par

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}dt = -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt.$$

Un changement de variables $u = \sqrt{x}t$ conduit au résultat voulu.

3. On a

$$\int_0^{+\infty} F'(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = 0 - \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{-\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} F'(x)dx = -\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du \times \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

On effectue le changement de variables $x = u^2$ dans la dernière intégrale, ce qui donne,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Finalement, on a établit que

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

On trouve donc bien le résultat voulu.

Correction de l'exercice 37 ▲

---

1. Posons $u(x,\theta) = \cos(x\sin\theta)$, définie sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$. u est de classe C^∞, ses dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à x étant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta) = -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta) = -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta).$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $\theta\in[0,\pi]$, on a

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta)\right| \leq 1.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,\pi]$. On en déduit que f est de classe C^2 puis que

$$f'(x) = \int_0^\pi -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta)d\theta,\ f''(x) = \int_0^\pi -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta)d\theta.$$

2. Utilisant $-\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$, on a

$$xf''(x) + xf(x) = \int_0^\pi x\cos^2\theta\cos(x\sin\theta)d\theta = \int_0^\pi \cos\theta\times\big(x\cos(\theta)\cos(x\sin\theta)\big)d\theta.$$

On réalise alors une intégration par parties dans cette dernière intégrale, pour trouver

$$xf''(x) + xf(x) = -f'(x).$$

3. En utilisant le développement en série entière de $\cos u$, on peut écrire que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}d\theta.$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $\theta\in[0,\pi]$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}\right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

et le terme de droite est le terme général d'une série (indépendante de θ) qui converge. On en déduit donc que, à x fixé, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}$ converge normalement sur $[0,\pi]$. On peut donc permuter la somme et l'intégrale, et on trouve que
$$f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\int_0^\pi(\sin\theta)^{2n}\right)d\theta x^{2n}.$$
On a bien développé f en série entière sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Remarquons d'abord que la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. D'autre part, en 0, elle est équivalente à t^{x-1} qui, par le critère de Riemann, est intégrable en 0 si et seulement si $x>0$. Au voisinage de $+\infty$, la fonction est toujours intégrable. En effet, si t est assez grand, on a
$$0\leq t^{x-1}e^{-t}\leq\frac{1}{t^2}$$
et on conclut à l'intégrabilité par le théorème de majoration. On a donc prouvé que le domaine de définition de Γ est $]0,+\infty[$.

2. La fonction g_k est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, le problème de convergence se traite comme précédemment. Au voisinage de 0, on a
$$g_k(t)\sim -t^{A-1}\ln t$$
et il s'agit d'une intégrale de Bertrand. On a $A-1>-1$. On peut trouver c dans l'intervalle $]-1,A-1[$. On a alors
$$g_k(t)=_0 o(t^c)$$
et ceci est une intégrale de Riemann convergente (en 0). Posons $f(t,x)=t^{x-1}e^{-t}$. Alors f est C^∞ sur $]0,+\infty[^2$, et
$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)=(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$
Soit $0<A\leq B$ et $x\in[A,B]$. Pour $t\leq 1$, on a
$$|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}|\leq|\ln t|^k t^{A-1}e^{-t},$$
et d'autre part, pour $t\geq 1$, on a
$$|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}|\leq|\ln t|^k t^{B-1}e^{-t}.$$
D'après la question précédente, on a majoré les dérivées partielles par rapport à x indépendamment de $x\in[A,B]$ par une fonction intégrable. Par application du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, Γ est de classe C^∞ sur n'importe quel segment $[A,B]\subset]0,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, et
$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

3. La fonction g_k est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, le problème de convergence se traite comme précédemment. Au voisinage de 0, on a
$$g_k(t)\sim -t^{A-1}\ln t$$
et il s'agit d'une intégrale de Bertrand. On a $A-1>-1$. On peut trouver c dans l'intervalle $]-1,A-1[$. On a alors
$$g_k(t)=_0 o(t^c)$$
et ceci est une intégrale de Riemann convergente (en 0).

4. Posons $f(t,x)=t^{x-1}e^{-t}$. Alors f est C^∞ sur $]0,+\infty[^2$, et
$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)=(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$
Soit $0<A\leq B$ et $x\in[A,B]$. Pour $t\leq 1$, on a
$$|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}|\leq|\ln t|^k t^{A-1}e^{-t},$$

et d'autre part, pour $t \geq 1$, on a
$$|(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}| \leq |\ln t|^k t^{B-1} e^{-t}.$$
D'après la question précédente, on a majoré les dérivées partielles par rapport à x indépendamment de $x \in [A,B]$ par une fonction intégrable. Par application du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, Γ est de classe C^∞ sur n'importe quel segment $[A,B] \subset]0,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, et

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

5. On intègre par parties, et on trouve :

$$\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Puisque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on en déduit par une récurrence immédiate que $\Gamma(n+1) = n!$. Enfin, pour x proche de 0, on a
$$\Gamma(x) \sim_0 \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim_0 \frac{\Gamma(1)}{x} \sim_0 \frac{1}{x}.$$

6. On a déjà calculé la dérivée seconde de Γ :

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comme la fonction que l'on intègre est positive, il en est de même de l'intégrale. Γ est donc convexe puisque sa dérivée seconde est positive.

7. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ étant concave, sa courbe représentative est sous ses tangentes, en particulier sous la tangente passant par le point $(0, \ln 1)$ d'équation $y = t$. On en déduit le résultat. Observons d'abord que

$$f_n(t) \to f(t) = t^{x-1} e^{-t} \text{ quand } n \to +\infty.$$

En effet,
$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - t/n\right)\right) \to e^{-t}.$$
D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0,n]$, on a, d'après la question précédente,

$$0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1} e^{-t} = f(t).$$

La fonction f étant intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la première question, on déduit du théorème de convergence dominée que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \Gamma(x).$$

8. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ étant concave, sa courbe représentative est sous ses tangentes, en particulier sous la tangente passant par le point $(0, \ln 1)$ d'équation $y = t$. On en déduit le résultat.

9. Observons d'abord que
$$f_n(t) \to f(t) = t^{x-1} e^{-t} \text{ quand } n \to +\infty.$$

En effet,
$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - t/n\right)\right) \to e^{-t}.$$
D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0,n]$, on a, d'après la question précédente,

$$0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1} e^{-t} = f(t).$$

La fonction f étant intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la première question, on déduit du théorème de convergence dominée que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \Gamma(x).$$

10. On fait le changement de variables $u = t/n$, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n f_n = \int_0^1 t^{x-1}(1-t/n)^n dt = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du,$$

qui est le résultat voulu.

11. Pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du = \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_0^1 + n\int_0^1 \frac{u^x}{x}(1-u)^{n-1}du.$$

Par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^1 u^{x+n-1}(1-u)^0 du\\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 39 ▲

1. On va appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur I. pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur I. Hypothèse de domination : soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ et pour tout $t \in I$, on a

$$|e^{-xt} f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|.$$

De plus, $t \mapsto e^{-at}|f(t)|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et cette fonction ne dépend plus de x (pourvu que $x \geq a$).

On en déduit que Lf est continue sur $]0,+\infty[$.

2. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur I.

3. pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur I.

4. Hypothèse de domination : soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ et pour tout $t \in I$, on a

$$|e^{-xt} f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|.$$

De plus, $t \mapsto e^{-at}|f(t)|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et cette fonction ne dépend plus de x (pourvu que $x \geq a$).

5. On va appliquer le théorème de convergence dominée (ou plutôt sa variante quand le paramètre décrit un intervalle). On commence par effectuer le changement de variables $u = xt$ pour faire disparaitre le x devant l'intégrale. Pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) du.$$

Mais

hypothèse de convergence : pour tout $u > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) = e^{-u} f(0).$$

hypothèse de domination : pour tout $x > 0$ et tout $u > 0$,

$$\left|e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right)\right| \leq Me^{-u}$$

où M est un majorant de $|f|$. Cette dernière fonction est intégrable, et ne dépend plus de x.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on trouve

$$\lim_{x\to+\infty} xLf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f(0) du = f(0).$$

6. hypothèse de convergence : pour tout $u > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) = e^{-u} f(0).$$

7. hypothèse de domination : pour tout $x > 0$ et tout $u > 0$,

$$\left|e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right)\right| \leq M e^{-u}$$

où M est un majorant de $|f|$. Cette dernière fonction est intégrable, et ne dépend plus de x.

8. On suit la même preuve. On commence par remarquer qu'une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et admettant une limite en $+\infty$ est bornée, et donc l'hypothèse de domination est encore vérifiée. Pour la convergence, on a cette fois

$$\lim_{x\to 0} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) = e^{-u}\ell_\infty.$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to 0} xLf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\ell_\infty du = \ell_\infty.$$

Correction de l'exercice 40 ▲

1. On pose $F(u) = \int_0^u f(t)e^{-xt}dt$. Alors,

$$\int_0^X f(t)e^{-yt}dt = \int_0^X f(t)e^{-xt}e^{-(y-x)t}dt = \int_0^X F'(t)e^{-(y-x)t}dt.$$

On réalise une intégration par parties, et on trouve :

$$\int_0^X f(t)e^{-yt}dt = F(X)e^{-(y-x)X} + (y-x)\int_0^X F(t)e^{-(y-x)t}dt.$$

Maintenant, F est majorée sur $[0,+\infty[$ (c'est une fonction continue qui admet une limite en $+\infty$). Quand X tend vers $+\infty$, $\int_0^X F(t)e^{-(y-x)t}dt$ admet donc une limite (l'intégrale est absolument convergente), et $F(X)e^{-(y-x)X}$ converge vers 0. Ainsi, $\int_0^X f(t)e^{-yt}dt$ admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale impropre est convergente.

2. L'ensemble de définition est donc un intervalle non-borné à droite, c'est-à-dire ou bien $]-\infty,+\infty[$, $]a,+\infty[$ ou $[a,+\infty[$.

3. Il s'agit d'une simple application du théorème de convergence dominée : soit M un majorant de $|f|$. Pour $x > 1$, on a

$$|f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-t}$$

qui est une fonction intégrable. D'autre part, pour chaque $t > 0$ fixé,

$$\lim_{x\to+\infty} f(t)e^{-xt}dt = 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

Correction de l'exercice 41 ▲

1. Soit $\phi : [0,1]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $(t,\alpha)\mapsto f^\alpha(t)$. ϕ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}_+$ et,

$$\forall (t,\alpha)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+,\ \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(t,\alpha) = \ln f(t) f^\alpha(t).$$

Cette application est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}_+$ et si on fixe $[a,b]\subset\mathbb{R}_+$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(t,\alpha)\in[0,1]\times[a,b]$,

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(t,\alpha)\right| \leq M$$

puisque $\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}$ est continue sur le compact $[0,1]\times[a,b]$. Les constantes étant intégrales sur un intervalle borné, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, et on trouve que F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et

$$F'(\alpha) = \int_0^1 \ln f(t) f^\alpha(t)dt \text{ en particulier } F'(0) = \int_0^1 \ln f(t)dt.$$

2. On cherche la limite de $F(\alpha)^{1/\alpha} = \exp\left(\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}\right)$. Or, on a

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}\right) &= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\alpha F'(0)+o(\alpha)\right)}{\alpha}\right)\\
&= \exp\left(F'(0)+o(1)\right).
\end{aligned}$$

La limite recherchée vaut donc

$$\exp\left(F'0)\right) = \exp\left(\int_0^1 \ln f(t)dt\right).$$

Correction de l'exercice 42 ▲

1. Puisque $f(0) = 0$, le théorème fondamental du calcul intégral nous garantit que

$$f(x) = \int_0^x f'(u)du.$$

Effectuons le changement de variables $u = xt$, $du = xdt$. On obtient

$$f(x) = x\int_0^1 f'(tx)dt,$$

ce qui est le résultat demandé. Mais la formule

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$$

a un sens pour $x = 0$. Montrons que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \geq 0$, la fonction $u : (x,t) \mapsto f'(xt)$ admet une dérivée partielle par rapport à x d'ordre k. De plus, si on fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors puisque $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ est continue, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(x,t) \in [a,b]\times[0,1]$ (partie compacte de $\mathbb{R}^2$),

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq M.$$

Les constantes étant intégrables sur un segment borné, on en déduit que g définit une fonction C^∞.

2. C'est la même méthode, mais on remplace l'utilisation du théorème fondamental du calcul intégral par la formule de Taylor avec reste intégral. On a donc, puisque toutes les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre $n-1$ sont nulles,

$$f(x) = \int_0^x (x-u)^{n-1}\frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!}du.$$

On pose encore $u = tx$, de sorte que

$$f(x) = \int_0^1 (x-xt)^{n-1}\frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!}xdt$$

soit

$$g(x) = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!}dt.$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, ceci définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $g(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Correction de l'exercice 43 ▲

L'idée est de se ramener à une intégrale sur un segment par un changement de variables. Pour cela, on pose, à x fixé,

$$t = u(x) + \theta\big(v(x) - u(x)\big).$$

On en déduit que, pour tout $x \in I$,

$$F(x) = \big(v(x) - u(x)\big) \int_0^1 f\big(x, u(x) + \theta\big(v(x) - u(x)\big)\big) d\theta.$$

Le changement de variables précédent n'a un sens que si $u(x) \neq v(x)$ mais on peut remarquer que la formule reste vraie même si $u(x) = v(x)$. On conclut par continuité de $(x, \theta) \mapsto f\big(x, u(x) + \theta\big(v(x) - u(x)\big)\big)$ sur $I \times [0, 1]$ et par application du théorème de continuité d'une intégrale à paramètres. Remarquons qu'il est plus facile d'appliquer ce théorème ici car on intègre une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.