Chapitre : Exercices sur les polynômes d'endomorphismes

1 Polynôme annulateur

Exercice 1 ★ Diagonalisable avec un polynôme annulateur –

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables (dans $\mathbb{R}$) telles que $A^3 + 2A = 3I_n$.

Indication ▼ Correction ▼ [3398]

Exercice 2 ★★ Par blocs –

Soit M une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A et que Q est un polynôme annulateur de B. Déterminer un polynôme annulateur de M.

Indication ▼ Correction ▼ [1442]

Exercice 3 ★★ Composée –

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit P un polynôme annulateur de u. On suppose que $P = QR$, où Q et R sont premiers entre eux. Démontrer que $\mathrm{Im}(R(u)) = \ker(Q(u))$.

Indication ▼ Correction ▼ [1443]

Exercice 4 ★★ Puissance d'une matrice et polynôme d'endomorphisme –

Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1. Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.

Indication ▼ Correction ▼ [1439]

Exercice 5 ★ Existence d'un polynôme annulateur –

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de u (autre que le polynôme nul) ?

Indication ▼ Correction ▼ [1444]

Exercice 6 ★★★ Une autre réduction avec un polynôme annulateur –

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 + f = 0$.

1. Démontrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
2. On suppose de plus que $f \neq 0$. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3394]

Exercice 7 ★★★ Polynôme annulateur –

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

Indication ▼ Correction ▼ [1445]

Exercice 8 ★★★ Polynômes annulateurs de A et propriétés de A –

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si ω est une valeur propre de A de multiplicité s, alors $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité s.

2. On suppose que $A^3-3A-4I_n=0$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.

3. On suppose que $A^2+A+I_n=0$. Montrer que n est pair.

4. On suppose que $A^3+A^2+A=0$. Montrer que le rang de A est pair.

5. On suppose que $A^3+A^2+A=0$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(A)\in\mathbb{Z}^-$.

Indication ▼ Correction ▼ [1441]

Exercice 9 ★★★ Polynôme annulateur de degré 2 –

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe des réels a,b et c tels que $af^2+bf+c\mathrm{Id}_E=0$, avec $a>0$ et $\Delta=b^2-4ac>0$.

1. Montrer que f satisfait une relation de la forme $(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\circ(f-\beta\mathrm{Id}_E)=0$ où α et β sont des réels tels que $\alpha>\beta$ que l'on précisera.

2. Déterminer, en fonction de a,b et c, deux réels u et v tels que $s=u(f+v\mathrm{Id}_E)$ soit une symétrie.

3. On pose $p=(s+\mathrm{Id}_E)/2$ et $q=\mathrm{Id}_E-p$.

Vérifier que p et q sont des projections. Montrer la relation $f=\alpha p+\beta q$. En déduire une expression de f^n pour $n\in\mathbb{N}$.

4. Vérifier que p et q sont des projections.

5. Montrer la relation $f=\alpha p+\beta q$.

6. En déduire une expression de f^n pour $n\in\mathbb{N}$.

7. On suppose $c\neq 0$.

Démontrer que f est inversible. Exprimer f^{-1} en fonction de p et q, α et β. En déduire une expression de f^n pour $n\in\mathbb{Z}$.

8. Démontrer que f est inversible.

9. Exprimer f^{-1} en fonction de p et q, α et β.

10. En déduire une expression de f^n pour $n\in\mathbb{Z}$.

Indication ▼ Correction ▼ [2583]

Exercice 10 ★★★ Endomorphisme sur un espace de matrices –

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit ϕ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi_A(M)=AM$.

1. Démontrer que $\phi_A=0$ si et seulement si $A=0$.

2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Exprimer $P(\phi_A)$ en fonction de $P(A)$.

3. En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Indication ▼ Correction ▼ [2607]

Exercice 11 ★★★ Diagonalisabilité et projections –

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u est diagonalisable, et on note $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ ses valeurs propres. Justifier qu'il existe des projections $p_1,\dots,p_r$ de E tels que, pour tout $k\geq 1$,

$$u^k=\sum_{i=1}^r \lambda_i^k p_i.$$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe $p_1,\dots,p_r\in\mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ des complexes distincts tels que, pour tout $k\geq 1$,

$$u^k=\sum_{i=1}^r \lambda_i^k p_i.$$

Démontrer que u est diagonalisable.

Indication ▼ Correction ▼ [3097]

Exercice 12 ★★★★ Triangulaire supérieure par blocs –

Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$. On pose $M=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A\end{array}\right)$.

1. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(M)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que M soit diagonalisable.

Indication ▼ Correction ▼ [1399]

2 Polynôme caractéristique

Exercice 13 ★★ **Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon** –

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Indication ▼ Correction ▼ [3393]

Exercice 14 ★★ **Une propriété sur les polynômes** –

1. Démontrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

2. Déterminer une telle famille.

Indication ▼ Correction ▼ [1448]

Exercice 15 ★★ **Polynôme caractéristique de l'inverse** –

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A et Q celui de A^{-1}. Quelle relation a-t-on pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ entre $Q(\lambda)$ et $P(\lambda^{-1})$?

Indication ▼ Correction ▼ [2644]

Exercice 16 ★★★ **Les puissances sont triangulaires supérieures** –

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Démontrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \geq 2$, A^k est triangulaire supérieure. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que A est inversible ?

Indication ▼ Correction ▼ [1449]

Exercice 17 ★★★ **Endomorphisme sur un espace vectoriel réel** –

Soit f un endomorphisme d'un $-$espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe toujours une droite ou un plan de E stable par f.

Indication ▼ Correction ▼ [1421]

Exercice 18 ★★★ **Une application étonnante du théorème de Cayley-Hamilton** –

Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p = 0$$

pour tout $p > 0$. On souhaite prouver que tous les a_i sont nuls. On note D la matrice diagonale dont les coefficients sont $a_1, \dots, a_n$.

1. Quelle est la trace de D^p, pour $p \geq 1$?
2. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, prouver que l'un des a_i est nul.
3. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [3374]

Exercice 19 ★★★★ Polynôme caractéristique de AB et de BA. –

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite prouver que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
1. Démontrer le résultat si A ou B est inversible.
2. Dans le cas général, on considère les matrices de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $PN = MP$ et conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [1450]

Exercice 20 ★★★★★ Polynôme caractéristique de la comatrice –

Soit $A \in \mathscr{M}_n()$. Calculer le polynôme caractéristique de la comatrice de A.

Indication ▼ Correction ▼ [1446]

3 Polynôme minimal

Exercice 21 ★★★ Diagonalisation par polynôme minimal –

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
3. Diagonaliser U.

Indication ▼ Correction ▼ [2386]

Exercice 22 ★★ Polynôme minimal par reconstruction –

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E et soit F, G deux sous-espaces de E supplémentaires stables par u. On note π_u le polynôme minimal de u, π_F le polynôme minimal de $u_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $u_{|G}$. Démontrer que

$$\pi_u = \text{ppcm}(\pi_F, \pi_G).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1452]

Exercice 23 ★★ Racines du polynôme minimal et valeurs propres –

Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que les valeurs propres de u sont exactement les racines du polynôme minimal de u.

Indication ▼ Correction ▼ [1454]

Exercice 24 ★★★ X^2+1 est-il un polynôme minimal ? –

Existe-t-il dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme minimal est X^2+1 ?

Indication ▼ Correction ▼ [1453]

Exercice 25 ★★★ Inversibilité d'un polynôme en u –

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et soit π_u son polynôme minimal. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et π_u sont premiers entre eux.

Indication ▼ Correction ▼ [1451]

Exercice 26 ★★★ Diagonalisable et carré diagonalisable ? –

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable. Le résultat subsiste-t-il si A n'est pas inversible ?

Indication ▼ Correction ▼ [3400]

Exercice 27 ★★★★ Valeurs propres distinctes –

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les valeurs propres de f sont simples.
2. Il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de E.
3. La famille $\{Id, f, \dots, f^{n-1}\}$ est libre.

Indication ▼ Correction ▼ [1426]

Exercice 28 ★★★★★ Facteurs irréductibles du polynôme minimal et du polynôme caractéristique –

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note π_f (resp. χ_f) son polynôme minimal (resp. son polynôme caractéristique). Montrer que π_f et χ_f ont les mêmes facteurs irréductibles.

Indication ▼ Correction ▼ [1455]

4 Endomorphismes nilpotents - Matrices nilpotentes

Exercice 29 ★★ Une matrice sans racine carrée –

Soit $n \geq 2$ et A la matrice définie par $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = 1$ pour $i = 1, \dots, n-1$, les autres coefficients étant tous nuls.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Existe-t-il $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$?

Indication ▼ Correction ▼ [1434]

Exercice 30 ★★ Espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes –

Soit $n \geq 1$, $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, V le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{N}$, et T_0 le sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle.

1. Quelle est la dimension de T_0 ?
2. Démontrer que $V \subset T_0$.
3. Pour $j \in \{2, \dots, n\}$, on note $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$ et $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$. Calculer F_j^2. En déduire que $G_j \in V$.
4. Soit $\mathscr{F}$ la famille d'éléments de V constituée par les matrices $E_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$ avec $i \neq j$ et par les matrices G_k, $k = 2, \dots, n$. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une famille libre.
5. En déduire que $V = T_0$.

Indication ▼ Correction ▼ [2536]

Exercice 31 ★★★ Déterminant et matrices nilpotentes –

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Démontrer que $\det(A+N) = \det(A)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1435]

Exercice 32 ★★★★ **Tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible –**

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$. Le but de l'exercice est de démontrer que H contient une matrice inversible. On raisonne par l'absurde et on suppose que H ne contient pas de matrices inversibles.

1. Démontrer que H contient toutes les matrices nilpotentes.
2. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [1436]

Exercice 33 ★★★★ **Produit de matrices nilpotentes –**

1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente. Prouver que si $A \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(BA) < \mathrm{rg}(A)$.
2. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes qui commutent. Prouver que $A_1 \cdots A_n = 0$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que les matrices commutent ?

Indication ▼ Correction ▼ [1437]

Exercice 34 ★★★★★ **Matrices nilpotentes et trace des puissances –**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout $p \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [1438]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Quelles peuvent être les valeurs propres de A ?

Indication pour l'exercice 2 ▲

Calculer $P(M)$, $Q(M)$ et faire le produit...

Indication pour l'exercice 3 ▲

Utiliser le lemme de décomposition des noyaux et le théorème du rang.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Calculer J^2.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Prendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie le plus simple possible, et considérer un endomorphisme très simple sur cet espace vectoriel.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Démontrer que le noyau et l'image sont en somme directe, puis utiliser le théorème du rang.
2. Commencer par factoriser X^3+X puis utiliser le lemme de décomposition des noyaux.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Écrire $P(X)=a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0$ et traduire la condition sur les coefficients. Prendre ensuite $y\in\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)$ et prouver que $y=0$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Se lit sur le polynôme caractéristique.
2. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, puis exprimer le déterminant en fonction des valeurs propres.
3. A n'admet pas de valeurs propres réelles.
4. Utiliser la question précédente.
5. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, puis exprimer la trace en fonction des valeurs propres.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Copier la factorisation d'un polynôme du second degré.
2. Développer s^2 et remplacer f^2 pour trouver u et v de sorte que $s\circ s=q=\mathrm{Id}_E$.
3. On pose $p=(s+\mathrm{Id}_E)/2$ et $q=\mathrm{Id}_E-p$.
Calculer p^2 et q^2. Partir de $\alpha p+\beta q$. Remarquer que $p\circ q=q\circ p=0$, puis procéder par récurrence.
4. Calculer p^2 et q^2.
5. Partir de $\alpha p+\beta q$.
6. Remarquer que $p\circ q=q\circ p=0$, puis procéder par récurrence.
7. Factoriser $af^2+bf=c\mathrm{Id}_E$. Quelle formule naturelle peut on conjecture pour f^{-1} ? En déduire une expression de f^n pour $n\in\mathbb{Z}$.
8. Factoriser $af^2+bf=c\mathrm{Id}_E$.
9. Quelle formule naturelle peut on conjecture pour f^{-1} ?
10. En déduire une expression de f^n pour $n\in\mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Si $A\neq 0$, trouver une matrice M telle que $\phi_A(M)\neq 0$.
2.

3. Caractériser la diagonalisabilité en utilisant l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Penser aux projecteurs spectraux.
2. Trouver un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. Commencer par calculer M^k.

2. Remarquer que si A est diagonalisable et si P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, alors $P'(A)$ est inversible.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Par des opérations successives, mettre des 0 sur les $n-1$ premiers coefficients de la première ligne de $\lambda I_n - A$.

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. On pourra utiliser l'endomorphisme $u : P(X) \longmapsto P(X+1)$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et lui appliquer le théorème de Cayley-Hamilton.

2. On pourra utiliser l'endomorphisme $v = u - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$ et calculer v^n.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Partir de la définition de Q, factoriser par A^{-1} et utiliser des propriétés du déterminant.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Pour la réciproque, utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. Comment la condition A inversible se traduit-elle sur le polynôme caractéristique ?

Indication pour l'exercice 17 ▲

Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, et séparer le cas où le polynôme caractéristique ne contient que des facteurs de degré 2.

Indication pour l'exercice 18 ▲

1.
2. Appliquer la trace à l'égalité résultat du théorème de Cayley-Hamilton.
3. Au moins un des coefficients est nul.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Démontrer que AB et BA sont semblables.
2. Vérifier également que P est inversible.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Traiter d'abord le cas où A est inversible, en utilisant la formule de Cramer. On souhaite une expression en fonction des valeurs propres de A.

Indication pour l'exercice 21 ▲

1.

2. Quel est le polynôme minimal de U ?

Indication pour l'exercice 22 ▲

Posons $P = \mathrm{ppcm}(\pi_F, \pi_G)$. et prouvons que $\pi_u | P$ puis que $P | \pi_u$.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Pour une inclusion, utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. Pour l'autre inclusion, utiliser que si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Discuter suivant la parité de n, puis traiter d'abord le cas $n = 2$.

Indication pour l'exercice 25 ▲

Quel théorème applique-t-on souvent quand on a deux polynômes premiers entre eux ? Pour l'autre sens, partir de P un polynôme non premier avec π_u et construire un polynôme R avec $\deg(R) < \deg(\pi_u)$ tel que $P(u)R(u) = 0$.

Indication pour l'exercice 26 ▲

Partir du polynôme minimal de A^2 pour fabriquer un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Pour 1. $\implies$ 2., considérer $x = e_1 + \cdots + e_n$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres. Pour 3. $\implies$ 1., quel va être le degré du polynôme minimal de f ?

Indication pour l'exercice 28 ▲

Indication pour l'exercice 29 ▲

Pour la deuxième question, vérifier que A est nilpotente, et calculer son indice de nilpotence.

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. T_0 est le noyau d'une forme linéaire.
2. Réduire les matrices nilpotentes.
3.
4.
5. Faire un raisonnement sur les dimensions.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Démontrer que $I_n + A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

Indication pour l'exercice 32 ▲

1. Partir de $H \oplus \mathrm{vect}(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et décomposer une matrice nilpotente dans cette somme directe.
2. Écrire une matrice inversible comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. Démontrer que si les rangs sont égaux, alors B induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Majorer le rang du produit de p matrices nilpotentes par récurrence.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Pour la réciproque, exprimer $\mathrm{Tr}(A^p)$ en fonction des valeurs propres distinctes et non-nulles de A, et montrer que si on a toujours $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$, alors il n'est pas possible que ces valeurs propres existent.

Correction de l'exercice 1 ▲

Notons $P(X) = X^3 + 2X - 3$. Alors P est un polynôme annulateur pour A. Les valeurs propres de A sont donc racines de P. De plus, P se factorise en $P(X) = (X-1)(X^2+X+3)$. Puisque X^2+X+3 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (son discriminant est négatif), la seule valeur propre possible pour A est 1. Puisque A est diagonalisable, on doit nécessairement avoir $A = I_n$. Réciproquement, I_n vérifie l'équation.

Correction de l'exercice 2 ▲

On commence par remarque que, pour tout $n \geq 1$, M^n a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout polynôme R, on a

$$R(M) = \begin{pmatrix} R(A) & * \\ 0 & R(B) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$P(M) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } Q(M) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors aisément que $PQ(M) = P(M)Q(M) = 0$.

Correction de l'exercice 3 ▲

D'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(P(u)) = \ker(R(u)) \oplus \ker(Q(u)).$$

En particulier, on sait que $\dim(\ker R(u)) + \dim(\ker Q(u)) = \dim(E)$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $R(u)$, on a aussi

$$\dim(\mathrm{Im}(R(u))) + \dim(\ker(R(u))) = \dim(E).$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(R(u))$ et $\ker(Q(u))$ ont la même dimension. De plus, on a sait que

$$QR(u) = Q(u) \circ R(u) = 0,$$

ce qui implique que $\mathrm{Im}(R(u)) \subset \ker(Q(u))$. Puisque ces deux sous-espaces ont la même dimension, ils sont en réalité égaux.

Correction de l'exercice 4 ▲

On vérifie facilement que $J^2 = nJ$ et donc que $P(X) = X^2 - nX$ est un polynôme annulateur pour J. Effectuons ensuite la division euclidienne de X^k par P. Puisque P est de degré 2, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$X^k = P(X)Q(X) + aX + b.$$

On évalue cette égalité en les racines de P, à savoir 0 et n. L'évaluation en 0 donne $b = 0$ et l'évalution en n donne $a = n^{k-1}$. On a donc $X^k = P(X)Q(X) + n^{k-1}X$. On en déduit que $J^k = n^{k-1}J$, relation que l'on aurait tout aussi bien pu prouver assez simplement par récurrence !

Correction de l'exercice 5 ▲

On sait qu'on a un polynôme annulateur non-nul lorsque E est de dimension finie. Si E est de dimension infinie, ce n'est plus nécessairement le cas. Considérons par exemple $E = \mathbb{R}[X]$, et u l'endomorphisme défini par $u(A) = XA$. Alors u n'admet pas de polynôme annulateur autre que le polynôme nul. En effet, soit $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_0$ un polynôme, alors

$$P(u)(1) = a_k u^k(1) + \cdots + a_1 u(1) + a_0 Id(1) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0,$$

qui est non-nul si $P \neq 0$. D'où $P(u) \neq 0$ si $P \neq 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. On va commencer par démontrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. En effet, si $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(x)$ et de plus $f(y) = 0$. Donc $f^3(x) = f^2(y) = 0$, et $f^3(x) = -f(x) = -y$. Ainsi, $y = 0$. On déduit alors du théorème du rang que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $P(X) = X^3 + X = X(X^2+1)$. D'après le lemme de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id}).$$

On sait aussi que $\dim(\ker(f^2+\mathrm{Id})) \geq 1$ car $f \neq 0$. Mais la dimension de ce sous-espace (stable par f) ne peut pas être impaire car sinon, la restriction de f à ce sous-espace admettrait un vecteur propre $x \neq 0$ associé à une valeur propre λ et on aurait à la fois

$$f^2(x) = \lambda^2 x \text{ et } f^2(x) = -x$$

ce qui est absurde puisqu'on ne peut pas avoir $\lambda^2 = -1$. Ainsi, $\ker(f)$ est de dimension 1, et $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id})) = 2$. Soit u un vecteur non-nul de $\ker(f)$ et w un vecteur non nul de $\ker(f^2+\mathrm{Id})$. Posons $v = f(w)$. Alors (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base, la matrice de f a la forme demandée.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ ce polynôme. Puisque $P(0) = 0$, on a $a_0 = 0$. Puisque $P'(0) \neq 0$, on a $a_1 \neq 0$. Prenons maintenant $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On peut donc écrire $y = f(x)$ et on sait que $f(y) = 0$, ce qui entraîne $f^p(x) = 0$ pour tout $p \geq 2$. On applique alors la relation $P(f) = 0$ à x :

$$0 = P(f)(x) = a_n f^n(x) + \cdots + a_1 f(x) = a_1 f(x) = a_1 y$$

ce qui entraîne $y = 0$. $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont donc en somme directe. De plus, par le théorème du rang, on sait que

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E).$$

D'où l'égalité demandée.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Si $C_A(X) = (X-\omega)^s Q(X)$ avec $Q(\omega) \neq 0$, alors puisque C_A est un polynôme réel, en passant au conjugué,

$$C_A(X) = \overline{C_A}(X) = (X - \bar{\omega})^s \bar{Q}(X)$$

avec $\bar{Q}(\bar{\omega}) = \overline{Q(\omega)} \neq 0$. Ainsi, $\bar{\omega}$ est racine de C_A de multiplicité s.

2. Une simple étude de $P(X) = X^3 - 3X - 4$ montre que $P(X) = (X-\alpha)(X-\omega)(X-\bar{\omega})$, où $\alpha > 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Ainsi, A annule un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont dans $\{\alpha, \omega, \bar{\omega}\}$. Le déterminant de A étant égal au produit des valeurs propres, il vaut ici $\det(A) = \alpha^r \omega^s (\bar{\omega})^t$. D'après la question précédente, $s = t$ et $\det(A) = \alpha^r |\omega|^{2s} > 0$.

3. Les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ sont $\lambda_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$, qui sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, sont parmi λ_1 et λ_2. Donc A n'admet pas de valeurs propres réelles. Son polynôme caractéristique, qui est de degré n, n'admet pas de racines sur $\mathbb{R}$. Ceci n'est possible que si n est pair (tout polynôme de degré impair s'annule au moins une fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires et l'étude des limites en $\pm\infty$).

4. Considérons f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A. On a $f^3 + f^2 + f = 0$. $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f, on peut considérer g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ qui est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, on a $y = f(x)$, d'où

$$g^2(y) + g(y) + y = f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi, $g^2 + g + Id = 0$. La question précédente nous dit que $\mathrm{Im}(f)$, l'espace sur lequel g agit, est de dimension paire.

5. On procède comme à la deuxième question. On factorise $X^3+X^2+X=X(X-j)(X-j^2)$. A annule un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont dans 0, j et j^2. Notons r,s,t leurs multiplicités respectives. Comme à la première question, on doit avoir $t=s$. Maintenant,

$$\mathrm{Tr}(A)=r0+s(j+j^2)=-s\in\mathbb{Z}^-.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. On copie la méthode de résolution des équations polynomiales de degré deux, en commençant par la mise sous forme canonique. En effet, on peut écrire que

$$\begin{aligned}
af^2+bf+c\mathrm{Id}_E &= a\left(f^2+\frac{b}{a}f+\frac{c}{a}\mathrm{Id}_E\right)\\
&= a\left(\left(f+\frac{b}{2a}\mathrm{Id}_E\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\mathrm{Id}_E\right)\\
&= a\left(f+\frac{b}{2a}\mathrm{Id}_E-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\mathrm{Id}_E\right)\circ\left(f+\frac{b}{2a}\mathrm{Id}_E+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\mathrm{Id}_E\right)\\
&= a(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\circ(f-\beta\mathrm{Id}_E)
\end{aligned}$$

où on a posé $\alpha=(-b+\sqrt{\Delta})/2a$ et $\beta=(-b-\sqrt{\Delta})/2a$. L'équation $af^2+bf+c\mathrm{Id}_E=0$ est bien équivalente à $(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\circ(f-\beta\mathrm{Id}_E)=0$. Remarquons que si on avait conjecturé la valeur de α et de β (ce qui n'est pas si compliqué par analogie avec les équations du second degré), alors il suffisait de vérifier en développant que

$$a(f-\alpha\mathrm{Id}_E)\circ(f-\beta\mathrm{Id}_E)=af^2+bf+c\mathrm{Id}_E.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
s^2 &= u^2(f^2+2vf+v^2\mathrm{Id}_E)\\
&= u^2\left(\left(2v-\frac{b}{a}\right)f+\left(v^2-\frac{c}{a}\right)\mathrm{Id}_E\right)
\end{aligned}$$

On aura $s^2=\mathrm{Id}_E$ dès que $u^2\left(2v-\frac{b}{a}\right)=0$ et $u^2\left(v^2-\frac{c}{a}\right)=1$ (on ne dit pas que la condition est nécessaire, mais qu'elle est suffisante et c'est ce qui nous intéresse ici). L'endomorphisme s est donc une symétrie dès que $v=\frac{b}{2a}$ et $u=\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}$.

3. Il suffit de calculer p^2 et q^2, en utilisant que s est une symétrie. On a d'une part

$$p^2=\frac{1}{4}(s^2+2s+\mathrm{Id}_E)=\frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E+2s+\mathrm{Id}_E)=p$$

et d'autre part

$$q^2=\mathrm{Id}_E-2p+p^2=\mathrm{Id}_E-p=q.$$

Les endomorphismes p et q sont bien des projecteurs. On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
\alpha p+\beta q &= (\alpha-\beta)p+\beta\mathrm{Id}_E\\
&= \frac{\alpha-\beta}{2}s+\frac{\alpha+\beta}{2}\mathrm{Id}_E.
\end{aligned}$$

On remplace ensuite s,α et β par leur valeur en fonction de f,a,b et c. Il vient :

$$\begin{aligned}
\alpha p-\beta q &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}\left(f+\frac{b}{2a}\mathrm{Id}_E\right)-\frac{b}{2a}\mathrm{Id}_E\\
&= f.
\end{aligned}$$

On commence par remarquer que
$$p\circ q = p(\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0$$
et
$$q\circ p = (\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0.$$
On note ensuite, pour tout $n\geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante : $f^n = \alpha^n p + \beta^n q$. Initialisation : la propriété est vraie pour $n=1$. Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et prouvons $\mathscr{P}(n+1)$. On a
$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f^n\circ f\\ &= (\alpha^n p + \beta^n q)\circ(\alpha p + \beta q)\\ &= \alpha^{n+1}p + \beta^{n+1}q + \alpha^n\beta p\circ q + \beta^n\alpha q\circ p\\ &= \alpha^{n+1}p + \beta^{n+1}q. \end{aligned}$$
Conclusion : par le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 1$.

4. Il suffit de calculer p^2 et q^2, en utilisant que s est une symétrie. On a d'une part
$$p^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E) = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + 2s + \mathrm{Id}_E) = p$$
et d'autre part
$$q^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{Id}_E - p = q.$$
Les endomorphismes p et q sont bien des projecteurs.

5. On commence par remarquer que
$$\begin{aligned} \alpha p + \beta q &= (\alpha-\beta)p + \beta\mathrm{Id}_E\\ &= \frac{\alpha-\beta}{2}s + \frac{\alpha+\beta}{2}\mathrm{Id}_E. \end{aligned}$$
On remplace ensuite s,α et β par leur valeur en fonction de f,a,b et c. Il vient :
$$\begin{aligned} \alpha p - \beta q &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}\left(f + \frac{b}{2a}\mathrm{Id}_E\right) - \frac{b}{2a}\mathrm{Id}_E\\ &= f. \end{aligned}$$

6. On commence par remarquer que
$$p\circ q = p(\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0$$
et
$$q\circ p = (\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0.$$
On note ensuite, pour tout $n\geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante : $f^n = \alpha^n p + \beta^n q$. Initialisation : la propriété est vraie pour $n=1$. Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et prouvons $\mathscr{P}(n+1)$. On a
$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f^n\circ f\\ &= (\alpha^n p + \beta^n q)\circ(\alpha p + \beta q)\\ &= \alpha^{n+1}p + \beta^{n+1}q + \alpha^n\beta p\circ q + \beta^n\alpha q\circ p\\ &= \alpha^{n+1}p + \beta^{n+1}q. \end{aligned}$$
Conclusion : par le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 1$.

7. On écrit que $\frac{-a}{c}f^2 - \frac{b}{c}f = \mathrm{Id}_E$ qui se factorise en
$$f\circ\left(\frac{-a}{c}f - \frac{b}{c}\mathrm{Id}_E\right) = \left(\frac{-a}{c}f - \frac{b}{c}\mathrm{Id}_E\right)\circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Ainsi, f est inversible et
$$f^{-1} = \frac{-a}{c} f - \frac{b}{c} \mathrm{Id}_E.$$
La formule obtenue pour $n \geq 1$ pour f^n nous conduit à conjecturer que $f^{-1} = \alpha^{-1} p + \beta^{-1} q$. Pour démontrer cela, il suffit de vérifier que
$$f \circ (\alpha^{-1} p + \beta^{-1} q) = (\alpha^{-1} p + \beta^{-1} q) \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
Remplaçant f par $\alpha p + \beta q$, on a
$$(\alpha p + \beta q) \circ (\alpha^{-1} p + \beta^{-1} q) = p + q + \alpha\beta^{-1} p \circ q + \beta\alpha^{-1} q \circ p = p + q = \mathrm{Id}_E.$$
On a bien démontré la formule attendue pour f^{-1}. Le même raisonnement que précédemment (par récurrence) prouve que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$f^n = \alpha^n p + \beta^n q.$$
8. On écrit que $\frac{-a}{c} f^2 - \frac{b}{c} f = \mathrm{Id}_E$ qui se factorise en
$$f \circ \left(\frac{-a}{c} f - \frac{b}{c} \mathrm{Id}_E \right) = \left(\frac{-a}{c} f - \frac{b}{c} \mathrm{Id}_E \right) \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
Ainsi, f est inversible et
$$f^{-1} = \frac{-a}{c} f - \frac{b}{c} \mathrm{Id}_E.$$
9. La formule obtenue pour $n \geq 1$ pour f^n nous conduit à conjecturer que $f^{-1} = \alpha^{-1} p + \beta^{-1} q$. Pour démontrer cela, il suffit de vérifier que
$$f \circ (\alpha^{-1} p + \beta^{-1} q) = (\alpha^{-1} p + \beta^{-1} q) \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
Remplaçant f par $\alpha p + \beta q$, on a
$$(\alpha p + \beta q) \circ (\alpha^{-1} p + \beta^{-1} q) = p + q + \alpha\beta^{-1} p \circ q + \beta\alpha^{-1} q \circ p = p + q = \mathrm{Id}_E.$$
On a bien démontré la formule attendue pour f^{-1}.

10. Le même raisonnement que précédemment (par récurrence) prouve que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$f^n = \alpha^n p + \beta^n q.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si $A = 0$, il est clair que $\phi_A = 0$. Si $A \neq 0$, il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX \neq 0$. Soit M une matrice dont la première colonne est X. Alors on a $\phi_A(M)(e_1) = AMe_1 = AX \neq 0$ et donc l'endomorphisme ϕ_A est non nul.

2. L'associativité du produit matriciel permet d'écrire que $\phi_{A^n} = \phi_A^n$. Par linéarité, on en déduit ensuite que $\phi_{P(A)} = P(\phi_A)$.

3. Comme conséquence des deux questions précédentes, on sait que $P(\phi_A) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$. Un endomorphisme étant diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si ϕ_A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Notons E_i le sous-espace propre associé à λ_i. Alors, puisque E est diagonalisable, on sait que $\bigoplus_{i=1}^r E_i = E$. Pour $i = 1, \dots, r$, notons p_i la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. Soit $x \in E$. Alors x s'écrit $x = \sum_{i=1}^r x_i$ où $x_i = p_i(x) \in E_i$. On a alors
$$u^k(x) = \sum_{i=1}^r u^k(x_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^k x_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i^k p_i(x).$$

2. Par linéarité, il est facile de remarquer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$P(u) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) p_i.$$

Posons alors $P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$, de sorte que $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Alors la formule précédente prouve que $P(u) = 0$. L'endomorphisme u admet donc un polynôme annulateur scindé à racines simples : il est diagonalisable.

Correction de l'exercice 12 ▲

---

1. Par une récurrence simple sur k, qui utilise que $AB = BA$, on trouve que, pour tout $k \geq 1$,

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Par linéarité, on en déduit que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Supposons que M soit diagonalisable. Alors il existe un polynôme scindé à racines simples, noté P, tel que $P(M) = 0$. Alors $P(A) = 0$ et donc A est également diagonalisable. Démontrons de plus que $B = 0$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors A est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et donc $P'(A)$ est semblable à $\mathrm{diag}(P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n))$. Mais puisque P est scindé à racines simples et que $P(\lambda_i) = 0$ puisque P est annulateur pour A, on a $P'(\lambda_i) \neq 0$. Ainsi, $P'(A)$ est semblable à une matrice diagonale dont aucun coefficient sur la diagonale est nul : donc $P'(A)$ est inversible. Mais $P'(A)B = 0$, et donc $B = 0$. Réciproquement, supposons que A est diagonalisable et $B = 0$. Alors si P est un polynôme annulateur scindé à racines simples pour A, il est clair que P est un polynôme annulateur scindé à racines simples pour M, et donc M est diagonalisable.

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. En effectuant l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + \dots + \lambda^{n-1} L_n$$

(qui ne change pas le déterminant), on a

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 & -a_n \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & -a_2 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & \lambda - a_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & -a_2 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & \lambda - a_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

où $\alpha = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \dots - a_{n-1}\lambda - a_n$. On calcule alors le déterminant en effectuant un développement suivant la première ligne. Seul le dernier coefficient est non nul, et la matrice que l'on obtient à partir de ce dernier coefficient est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à -1. Donc

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^{n-1}\alpha \times (-1)^{n-1} = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \dots - a_{n-1}\lambda - a_n.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. L'endomorphisme $P(X) \longmapsto P(X+1)$ de $\mathbb{C}[X]$ induit un endomorphisme u de $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Notons

$$\chi(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

son polynôme caractéristique. Puisque $u^k(P)$ est égal à $P(X+k)$, on a d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \qquad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

2. L'endomorphisme $\Delta = u - \mathrm{Id}_E$ est nilpotent et vérifie $\Delta^n = 0$ puisque pour P non constant, $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$. On a donc

$$0 = (u - \mathrm{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k.$$

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k) = 0.$$

Ainsi, on peut choisir $a_k = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Correction de l'exercice 15 ▲

On écrit, pour $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}
Q(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A^{-1}) \\
&= \det(A^{-1}(\lambda A - I_n)) \\
&= \det(A^{-1}) \det(\lambda A - I_n) \\
&= \det(A^{-1}) \det(-\lambda(\lambda^{-1} I_n - A)) \\
&= \det(A^{-1})(-\lambda)^n \det(\lambda^{-1} I_n - A) \\
&= \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} P(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Le sens direct est clair (le produit de deux matrices triangulaires supérieures étant une matrice triangulaire supérieure). Réciproquement, soit $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

où $a_0 = (-1)^n \det(A)$. En particulier, $a_0 \neq 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_0 I_n = 0.$$

On multiplie la relation par A, puis on isole A. Il vient :

$$A = \frac{-1}{a_0} \left(a_1 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^n + A^{n+1} \right).$$

Ainsi, comme $A^2, \dots, A^{n+1}$ sont triangulaires supérieures, il en est de même de A. Le résultat ne subsiste pas si A n'est pas inversible. En effet, prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A n'est pas triangulaire supérieure, et pour tout $k \geq 2$, $A^k = 0$.

Correction de l'exercice 17 ▲

On note P_f le polynôme caractéristique de f, que l'on factorise en produit d'irréductibles sur :

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{l}(X-\alpha_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{m}(X^2+a_jX+b_j)^{q_j}.$$

Si cette factorisation possède un facteur de degré 1, l'endomorphisme possède un vecteur propre u, et la droite vectorielle vect(u) convient. Sinon, d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$(f^2+a_1f+b_1Id)^{q_1}\circ\cdots\circ(f^2+a_mf+b_mId)^{q_m}=0.$$

La composée d'applications bijectives étant bijective, une des applications que l'on compose au moins n'est pas bijective. On en déduit par exemple que $f^2+a_1f+b_1Id$ n'est pas une bijection. Soit $u \neq 0$ dans le noyau de cette application. Alors $f(u)$ n'est pas colinéaire à u puisque f est supposé ne pas admettre de valeur propre. Ainsi, vect$(u, f(u))$ est bien un plan vectoriel qui est stable par f, car $f^2(u) = -a_1f(u)-b_1u$. Remarquons qu'un endomorphisme sur un $-$espace vectoriel n'admet pas forcément une valeur propre, comme le prouve l'endomorphisme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

1. On a $\mathrm{Tr}(D^p) = \sum_{k=1}^{n} a_k^p$.

2. Notons $\chi_D(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1}+\cdots+c_1X+c_0$ le polynôme caractéristique de D. Alors par le théorème de Cayley-Hamiton,

$$D^n+c_{n-1}D^{n-1}+\cdots+c_1D+c_0I_n=0.$$

Appliquons la trace à l'égalité précédente. On trouve

$$nc_0 = 0 \implies c_0 = 0.$$

Or, $c_0 = \pm\det(D) = \pm\prod_{i=1}^{n} a_i$. On a bien prouvé que l'un des a_i est nul.

3. Si l'un des a_i est non nul, on note $I = \{i \in \{1,\dots,n\} :\ a_i \neq 0\}$ et on note $b_1,\dots,b_N$ les éléments de $\{a_i :\ i \in I\}$. On peut alors appliquer le résultat de la question précédente pour prouver que l'un des complexes $b_1,\dots,b_N$ est nul. C'est une contradiction.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Si par exemple A est inversible, AB et BA sont semblables. En effet, on peut écrire

$$A^{-1}(AB)A = BA.$$

2. Il est clair que

$$PN = MP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, P est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale, donc P est inversible. Il vient que M et N sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique. Mais le calcul de χ_M fait intervenir le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs. On peut calculer ce déterminant par blocs et on trouve que

$$\chi_M(X) = X^n\chi_{BA}(X).$$

De même, on a aussi

$$\chi_N(X) = X^n\chi_{AB}(X).$$

Puisque $\chi_M = \chi_N$, on en déduit que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Correction de l'exercice 20 ▲

On note B la transposée de la comatrice de A, il suffit de calculer le polynôme caractéristique de B. On suppose d'abord que A est inversible. La formule de Cramer s'écrit encore :

$$B = \det(A)A^{-1},$$

ce qui donne :

$$XI_n - B = \det(A)\left(\frac{X}{\det A}I_n - A^{-1}\right).$$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A dans , répétées autant de fois que leur multiplicité pour en avoir exactement n. On rappelle que le déterminant de A vaut :

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Par ailleurs, les valeurs propres de A^{-1} sont les $\frac{1}{\lambda_j}$, et le polynôme caractéristique de A^{-1} vaut donc :

$$P_{A^{-1}}(X) = \prod_{j=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\lambda_j}\right).$$

On obtient finalement que :

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \prod_{j=1}^{n}\lambda_j^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X}{\lambda_1 \ldots \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(X - \prod_{m \neq i}\lambda_m\right). \end{aligned}$$

Dans le cas où A n'est pas inversible, il est bien connu que pour $r > 0$ assez petit, $A_r = A + rI_n$ est inversible, et si r tend vers 0, la suite A_r tend vers A. En outre, les valeurs propres de A_r tendent vers les valeurs propres de A. Il suffit donc d'appliquer le résultat précédent à A_r, puis de faire tendre r vers 0 pour vérifier que le résultat est encore valable.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. On vérifie facilement que

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.

2. Le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U. Il est scindé, à racines simples (-1 et 3), et donc U est diagonalisable. On peut même aller un cran plus loin et affirmer que $X^2 - 2X - 3$ est le polynôme minimal de U, puisqu'aucun polynôme de degré un n'est polynôme annulateur de U qui n'est pas multiple de I_4. Ainsi, les valeurs propres de U sont -1 et 3.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On commence par résoudre $UX = -X$:

$$\begin{aligned} UX = -X &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+z+t &=& -x \\ x+z+t &=& -y \\ x+y+t &=& -z \\ x+y+z &=& -t \end{array} \right. \\ &\iff x+y+z+t = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -y-z-t \\ y &=& y \\ z &=& z \\ t &=& t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, -1 est une valeur propre de multiplicité 3, et une base de l'espace propre associé est donnée par les vecteurs $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$. Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3, dont on sait désormais qu'il est de dimension 1, on peut résoudre $UX = 3X$. On peut aussi remarquer que la somme de chaque ligne de la matrice fait 3. Ainsi, le vecteur $(1,1,1,1)$ est vecteur propre de U pour la valeur propre 3. Il constitue une base de l'espace propre associé à la valeur propre 3.

Correction de l'exercice 22 ▲

Posons $P = \text{ppcm}(\pi_F, \pi_G)$. Alors, pour tout $y \in F$, on a $P(u)(y) = 0$ car $\pi_F | P$ et pour tout $z \in G$, on $P(u)(z) = 0$ car $\pi_G | P$. Puisque tout élément de $x \in E$ s'écrit $y+z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on a $P(u)(x) = 0$, et donc $\pi_u | P$. Réciproquement, on sait que $\pi_F | \pi_u$ et que $\pi_G | \pi_u$, et donc $P | \pi_u$. En conclusion, on a bien $P = \pi_u$ (les deux polynômes sont unitaires).

Correction de l'exercice 23 ▲

D'abord, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est annulateur et c'est donc un multiple du polynôme minimal. Alors les racines du polynôme minimal sont racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire valeurs propres de u. Réciproquement, soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé (non nul). Alors pour tout polynôme P, on a $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Puisque $\pi_u(u) = 0$, on doit avoir $\pi_u(\lambda) = 0$ et donc λ est racine du polynôme minimal de u.

Correction de l'exercice 24 ▲

Supposons d'abord qu'il existe une telle matrice. Alors puisque X^2+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$, A n'admet pas de valeurs propres réelles. Ceci n'est possible que si n est pair, sinon le polynôme caractéristique est de degré impair et s'annule. Réciproquement, supposons que $n = 2p$ est pair. La clé est le cas $n = 2$. Dans ce cas, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient (dans ce cas, on a également $\chi_B(X) = X^2+1$). Plus généralement, pour $n = 2p$ pair quelconque, on considère la matrice diagonale par blocs comprenant sur la diagonale p blocs de B.

Correction de l'exercice 25 ▲

Supposons d'abord que P et π_u sont premiers entre eux. Alors, d'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + V\pi_u = 1$. On évalue en u :

$$U(u)P(u) + V(u)\pi_u(u) = Id_E \iff U(u)P(u) = Id_E.$$

$P(u)$ est donc inversible, d'inverse $U(u)$. Réciproquement, supposons que P et π_u ne sont pas premiers entre eux, et soit Q un facteur commun. On factorise π_u en $\pi_u = QR$ avec $\deg(Q), \deg(R) < \deg(\pi_u)$. En particulier, on a $R(u) \neq 0$. Mais d'autre part, $\pi_u | PR$ et donc $0 = P(u)R(u)$. Comme $R(u)$ est non-nul, $P(u)$ n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 26 ▲

Si A est diagonalisable, alors A s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, et donc $A^2 = PD^2P^{-1}$ est aussi diagonalisable. Réciproquement, supposons A^2 diagonalisable et notons P le polynôme minimal de A^2. Alors P est scindé à racines simples. De plus, puisque A, donc A^2, est inversible, 0 n'est pas valeur propre de A^2 et donc n'est pas racine de P. Factorisons P en $P(X) = \prod_{i=1}^r (X - z_i)$. Notons w_i et $-w_i$ les deux racines carrées de z_i et Q le polynôme

$$Q(X) = \prod_{i=1}^r (X - w_i)(X + w_i).$$

Alors Q est scindé à racines simples. De plus, Q est annulateur pour A. En effet,

$$\begin{aligned} Q(A) &= \prod_{i=1}^r (A - w_iI_n)(A + w_iI_n) \\ &= \prod_{i=1}^r (A^2 - z_iI_n) \\ &= P(A^2) = 0. \end{aligned}$$

Si A n'est pas supposé inversible, A^2 peut être diagonalisable sans que ce soit le cas de A. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable alors que A^2, la matrice nulle, l'est.

Correction de l'exercice 27 ▲

Commençons par prouver que 1. $\implies$ 2. Pour cela, on part de $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, $f(e_i) = \lambda_i e_i$, et posons $x = e_1 + \dots + e_n$. Alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre, donc c'est une base de E. En effet, s'il existe une relation de liaison

$$\alpha_0 x + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0,$$

alors puisque

$$f^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$$

en raisonnant coordonnées par coordonnées on obtient que pour tout i, on a

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1} = 0.$$

Notant P le polynôme $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$, on obtient que $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, donc P admet n racines distinctes. P est le polynôme nul, donc tous les α_i sont nuls et la famille est effectivement libre. Une autre façon de procéder aurait été de remarquer que la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une matrice de Vandermonde. L'implication 2. $\implies$ 3. est la plus facile des trois. En effet, si la famille $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ était liée, toute relation de liaison non triviale donnerait, par évaluation en x, une relation de liaison non triviale sur la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$. Prouvons enfin 3. $\implies$ 1.. Puisque f est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Mais d'après la troisième propriété, ce polynôme doit être au moins de degré n. Il est donc exactement de degré n, et admet n racines distinctes qui sont les valeurs propres de f.

Correction de l'exercice 28 ▲

Commençons par démontrer le résultat pour les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Les facteurs irréductibles des polynômes de $\mathbb{C}^n$ étant des polynômes de degré 1, il suffit de vérifier que π_f et χ_f ont les mêmes racines. Mais c'est bien le cas, puisque les racines de ces deux polynômes sont exactement les valeurs propres de l'endomorphisme. Pour démontrer le résultat sur $\mathbb{R}^n$, on commence par remarquer que π_f et χ_f sont les mêmes polynômes qu'on considère f comme endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ ou sur $\mathbb{C}^n$ (ce que l'on peut voir par des considérations matricielles par exemple). Ensuite, on conclut car si A et B sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant les mêmes facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, alors ils ont les mêmes facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$. En effet, les facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ peuvent être :

des polynômes de degré 1, qui sont aussi des facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et qui doivent donc apparaitre dans la décomposition en produit d'irréductibles de A s'ils apparaissent dans celles de B. des polynômes de degré 2 qui s'écrivent comme produits $(X-z_0)(X-\overline{z_0})$; ces polynômes $(X-z_0)$ et $(X-\overline{z_0})$ sont alors des facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, qui doivent tous deux apparaître dans la décomposition (sur $\mathbb{C}$) en produits d'irréductibles des deux polynômes. Leur produit apparaît donc simultanément dans la décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 29 ▲

A ne peut pas être diagonalisable. Sa seule valeur propre est 0, et si A était diagonalisable, alors ce serait la matrice nulle. Remarquons ensuite en calculant les puissances successives de A que $A^n=0$ alors que $A^{n-1}\neq 0$. S'il existait $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2=A$, alors on aurait $B^{2n}=A^n=0$. B serait donc nilpotente. Mais son indice de nilpotence doit être inférieur ou égal à n, et on aurait $B^n=0$. Mais $B^{2n-2}=A^{n-1}\neq 0$, et $2n-2\geq n$, ce qui est absurde. A n'admet pas de racine carrée.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. T_0 est le noyau de la forme linéaire Tr. Ainsi, $\dim(T_0)=\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))-1=n^2-1$.

2. V étant engendré par les matrices nilpotentes, et T_0 étant un espace vectoriel, il suffit de démontrer que $\mathscr{N}\subset T_0$. Mais, si A est une matrice nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients sur la diagonale sont nuls. Comme la trace est un invariant de similitude, on a bien $Tr(A)=0$.

3. C'est une question un peu calculatoire. En développant le carré (attention, les produits ne sont pas commutatifs !) et en utilisant que $E_{i,j}E_{k,l}=0$ si $j\neq k$ et $E_{i,l}$ sinon, on trouve que $F_j^2=0$. Puisque $E_{1,j}^2=0$ et $E_{j,1}^2=0$, on trouve bien que G_j, somme de trois matrices nilpotentes, est un élément de V.

4. Supposons que
$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\alpha_{i,j}E_{i,j}+\sum_{k=2}^{n}\beta_k G_k=0.$$
Alors, pour $k\geq 2$, le seul terme en position (k,k) vient de $\beta_k G_k$, et il vaut $-\beta_k$. On a donc $\beta_k=0$ pour tout $k=2,\dots,n$. On en déduit alors que les $\alpha_{i,j}$ sont nuls car la famille $(E_{i,j})$ est libre.

5. D'après la question précédente, on a $\dim(V)\geq(n^2-n)+(n-1)=n^2-1$. Puisque $V\subset T_0$ et que $\dim(V)\geq\dim(T_0)$, on a bien $V=T_0$.

Correction de l'exercice 31 ▲

On commence par écrire que $A+N=A(I_n+A^{-1}N)$ et donc il suffit de prouver que $\det(I_n+A^{-1}N)=1$. Pour cela, nous allons prouver que la matrice $A^{-1}N$ est nilpotente. En effet, puisque A et N commutent, donc que A^{-1} et N commutent, on a
$$(A^{-1}N)^p=A^{-p}N^p=0$$
dès que $N^p=0$. Ainsi, $A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (que des zéros sur la diagonale). On en déduit que $I_n+A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que
$$\det(I_n+A^{-1}N)=1$$
ce qui implique le résultat voulu.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. Puisque $I_n\notin H$, on a $H\oplus\mathrm{vect}(I_n)=\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit N une matrice nilpotente. Il existe $A\in H$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $N=A+\lambda I_n$. Puisque A n'est pas inversible, il existe un vecteur X non nul tel que $AX=0$. On en déduit

que $NX = \lambda X$ et donc que λ est une valeur propre de N. Comme N est nilpotente, elle n'admet que 0 pour valeur propre. Donc $\lambda = 0$ et $N = A \in H$.

2. Il suffit de prouver qu'on peut trouver une matrice inversible qui s'écrit comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes. Dans ce cas, on aura trouvé une matrice inversible dans H, une contradiction. Mais considérons

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors N_1 et N_2 sont clairement nilpotentes, et leur somme est inversible car de rang n.

Correction de l'exercice 33 ▲

1. Puisque $AB = BA$, on a toujours $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$. Si les rangs sont égaux, puisque $BA(\mathbb{R}^n) \subset B(\mathrm{Im}(A))$, B est injectif sur $\mathrm{Im}(A)$ (appliquer le théorème du rang à $B_{|\mathrm{Im}(A)}$). De plus, puisque $BA = AB$, on sait que $\mathrm{Im}(A)$ est stable par B. Autrement dit, B induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(A)$. C'est donc aussi le cas pour B^n. Mais $B^n = 0$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{Im}(A) = \{0\}$. Ainsi, si $A \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(BA) < \mathrm{rg}(A)$.

2. On prouve par récurrence sur p dans $\{0, \dots, n-1\}$ que

$$\mathrm{rg}(A_{n-p} \cdots A_n) \leq n - p - 1.$$

C'est vrai pour $p = 0$ car $\mathrm{rg}(A_n) < n$. Si c'est vrai à l'ordre $p < n-1$, alors ou bien $A_{n-p} \cdots A_n = 0$ et donc $A_{n-p-1} \cdots A_n = 0$ de rang 0, qui est bien inférieur ou égal à $n - p - 2$. Ou bien $A_{n-p} \cdots A_n \neq 0$, et d'après la question précédente :

$$\mathrm{rg}(A_{n-p-1} A_{n-p} \cdots A_n) \leq \mathrm{rg}(A_{n-p} \cdots A_n) - 1 \leq n - p - 2.$$

La propriété est donc vraie pour $p = n-1$ et elle prouve bien que $A_1 \cdots A_n = 0$. On ne peut pas se passer de l'hypothèse de commutativité, comme le montre l'exemple des deux matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 34 ▲

Un sens est facile. Si A est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et sa trace est nulle. Comme chaque A^p pour $p \geq 1$ est nilpotente, on a bien prouvé l'implication directe. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$ pour tout $p \geq 1$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes non-nulles de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. La trigonalisation de A montre que, pour tout $p \geq 1$, les valeurs propres de A^p sont $\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p$, de multiplicité respective $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Écrivons le système obtenu en écrivant les conditions $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$ pour $p = 1, \dots, m$. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_m\lambda_m & = & 0 \\ \alpha_1\lambda_1^2 + \dots + \alpha_m\lambda_m^2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1\lambda_1^m + \dots + \alpha_m\lambda_m^m & = & 0 \end{array} \right.$$

Puisque tous les λ_i sont non nuls et distincts deux à deux, on obtient un système de Vandermonde inversible, et on en déduit $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Donc A n'admet aucune valeur propre non nulle. Elle est donc nilpotente (puisque semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte).
