Chapitre : Exercices sur les variables aléatoires discrètes

1 Calculs de lois, d'espérances, de variances

Exercice 1 ★ **Loi de Pascal –**

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Indication ▼ Correction ▼ [1292]

Exercice 2 ★★ **Deux fois pile –**

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $q \in]-1,1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

Indication ▼ Correction ▼ [1293]

Exercice 3 ★★★ **Une certaine variable aléatoire –**

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Indication ▼ Correction ▼ [1294]

Exercice 4 ★★★ **Rangée de spots –**

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :

à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé. si, à l'instant $t = n$, $n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable. si, à l'instant $t = n$, $n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n+1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Écrire une fonction python `simulspot()` qui simule le fonctionnement de la variable aléatoire X.
2. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
4. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$.
5. Déterminer l'espérance de X.

Indication ▼ Correction ▼ [1295]

Exercice 5 ★★★ **Permis de conduire –**

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i.

1. Question préliminaire : soit $x \in]-1,1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\sum_{n\geq r} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Que représente S_n ? Donner sa loi, son espérance, sa variance.

3. En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T ? Son espérance ?

Indication ▼ Correction ▼ [2024]

Exercice 6 ★★★ **Loi du nombre de boules blanches présentes à l'issue du n-ème tirage –**

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On y effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire une boule ; si elle est noire, on la remet dans l'urne. Si elle est blanche, on remet dans l'urne, à la place de la boule blanche, une boule noire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n-ème tirage. Ainsi, Y_n prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$.

1. Déterminer la loi de Y_1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y_n = 2)$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(Y_n = 1)$. Calculer u_1 puis démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.
4. En utilisant la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 0)$ puis déterminer l'espérance de Y_n.
6. On définit la variable aléatoire Z égale à l'instant où, pour la première fois, l'urne ne contient plus que des boules noires. On convient que $Z = 0$ si l'urne contient toujours au moins une boule blanche. Déterminer la loi de Z, puis montrer que Z admet une espérance et la déterminer.

Indication ▼ Correction ▼ [3496]

---

2 Loi de Poisson

Exercice 7 ★ **Décroissance d'une loi de Poisson –**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.

Indication ▼ Correction ▼ [2023]

Exercice 8 ★ **Maximum d'une loi de Poisson –**

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

Indication ▼ Correction ▼ [1279]

Exercice 9 ★★ **Mutualisation –**

Une région comporte 10 hôpitaux. Chaque hôpital peut réaliser 10 interventions chirurgicales d'urgence par jour, et on admet que le nombre de personnes se présentant à un hôpital donné un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre 8, et que ce nombre est indépendant d'un hôpital à l'autre.

1. On regarde un hôpital. Quelle est la probabilité qu'un jour donné celui-ci soit saturé ? Quelle est la probabilité qu'au moins un des 10 hôpitaux soit saturé un jour donné ?
2. On regarde un hôpital. Quelle est la probabilité qu'un jour donné celui-ci soit saturé ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 10 hôpitaux soit saturé un jour donné ?
4. On suppose que quand un hôpital est saturé, il peut opérer un transfert de malades vers un autre hôpital. Quelle est la probabilité que le système hospitalier de la région soit saturé ?

Indication ▼ Correction ▼ [2875]

Exercice 10 ★★★ **Retrouver une loi connaissant son conditionnement –**

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de Y ?

Indication ▼ Correction ▼ [1280]

Exercice 11 ★★★ **Chaine de fabrication –**

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine A" .

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine A en une heure.

Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y. Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k|Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$). En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

3. Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

4. Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k|Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

5. En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Indication ▼ Correction ▼ [1289]

Exercice 12 ★★★ **Ponte d'oeufs –**

Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

1. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(Z = k|X = n)$.
2. En déduire la loi de Z ?
3. Quelle est l'espérance de Z ?

Indication ▼ Correction ▼ [2301]

Exercice 13 ★★★ **Tirage et loi de Poisson –**

Pierre et Quentin jouent au jeu suivant. On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Quention. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Quentin gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Quentin gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Indication ▼ Correction ▼ [2022]

3 Loi géométrique

Exercice 14 ★ **Calcul sur la loi géométrique –**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $a,b \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence et éventuellement calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{P(X \geq an)}{P(X \geq bn)}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [3494]

Exercice 15 ★★ **Variable aléatoire discrète sans mémoire –**

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k,n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X > k+n | X > n) = P(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$. En déduire que X est sans mémoire. Interpréter ce résultat en termes d'épreuves de Bernoulli.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
3. En déduire que X est sans mémoire. Interpréter ce résultat en termes d'épreuves de Bernoulli.
4. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$. En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1-q$.
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
6. En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1-q$.

Indication ▼ Correction ▼ [2011]

Exercice 16 ★★ **Variable aléatoire géométrique supérieure à une variable aléatoire géométrique –**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer $P(Y > X)$.

Indication ▼ Correction ▼ [2505]

Exercice 17 ★ **Loi du minimum de deux variables géométriques –**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X,Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z.

Indication ▼ Correction ▼ [3421]

Exercice 18 ★ **Loi du max de deux lois géométriques –**

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$ et $Z = \max(X,Y)$ et on se propose de déterminer de deux façons différentes la loi de Z.

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X,Y)$.
Pour $m,n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$. En déduire la loi de Z.
2. Pour $m,n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$.
3. En déduire la loi de Z.
4. Méthode 2.
Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$. Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$. En déduire la loi de Z.
5. Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
6. Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$.
7. En déduire la loi de Z.

Indication ▼ Correction ▼ [3422]

Exercice 19 ★★ Un problème chinois ! –

On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple pris au hasard dans la population.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X.

2. On suppose qu'une génération en âge de procréer est constituée de N couples, et on note $X_1,\cdots,X_N$ le nombre d'enfants respectif de chaque couple. On note enfin P la proportion de garçons issus de cette génération. Exprimer P en fonction de $X_1,\dots,X_N$.

3. Quelle est la limite de P lorsque N tend vers l'infini. Qu'en pensez-vous ?

Indication ▼ Correction ▼ [1290]

Exercice 20 ★★ Taux de panne –

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X\geq n)>0.$$

On appelle taux de panne associé à X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$x_n=P(X=n|X\geq n).$$

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $p_n=P(X=n)$. Démontrer que

$$p_{n+1}=\frac{x_{n+1}}{x_n}(1-x_n)p_n.$$

En déduire une expression de p_n en fonction des x_k, $1\leq k\leq n$.

2. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi géométrique si et seulement si son taux de panne est constant.

Indication ▼ Correction ▼ [3483]

Exercice 21 ★★★ Service de dépannage –

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance. Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".

2. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.

3. Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".

4. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.

Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z=k$ sachant que $Y=n$. En déduire la probabilité de "$Z=k$ et $Y=n$". Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m\times 0,25$.

5. Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z=k$ sachant que $Y=n$.

6. En déduire la probabilité de "$Z=k$ et $Y=n$".

7. Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m\times 0,25$.

8. En 2020, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Indication ▼ Correction ▼ [1287]

Exercice 22 ★★★ Pile ou face –

On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p, où $p \in]0,1[$. Si $n \geq 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le $n-$ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et $A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $A_1, \dots, A_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

Indication ▼ Correction ▼ [1291]

Exercice 23 ★★★ Deux blocs de la même couleur –

On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, avec $(n,b) \in \mathbb{N}^2$. Les boules sont supposées indiscernables au toucher. On notera $p = n/(n+b)$ et $q = 1-p = b/(n+b)$. On effectue une suite infinie de tirages avec remise dans cette urne. Après chaque tirage, la boule piochée est remise dans l'urne. La composition de l'urne est donc identique pour tous les tirages. On suppose qu'on dispose d'un espace probabilisé (Ω, P) permettant d'étudier cette expérience. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera N_k l'événement "obtenir une boule noire au k-ième tirage" et B_k l'événement "obtenir une boule blanche au k-ième tirage". On s'intéresse aux nombres de tirages successifs permettant d'obtenir deux changements de couleur dans les résultats. On obtient d'abord $i \in \mathbb{N}^*$ boules successives d'une même couleur, puis $j \in \mathbb{N}^*$ boules successives de l'autre couleur, puis une boule de la couleur initiale. La variable aléatoire X désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en début de tirage, la variable aléatoire Y désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en deuxième partie de tirage. Par exemple, l'événement $(X = 4 \cap Y = 2)$ correspond à "obtenir successivement 4 boules noires, puis 2 blanches, puis 1 noire" ou à "obtenir successivement 4 boules blanches, puis 2 noires, puis 1 blanche".

1. Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X = i \cap Y = j)$.
2. En déduire la loi de X, puis la loi de Y.
3. Montrer que X admet une espérance, puis la calculer. Vérifier que $E(X) \geq 2$.
4. Montrer que Y admet une espérance, puis que $E(Y) = 2$.
5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = n \cap Y = n) = (pq)^n$, puis en déduire $P(X = Y)$.
6. On note $S = X + Y$. Que vaut $S(\Omega)$? Déterminer la loi de S.

Indication ▼ Correction ▼ [2614]

Exercice 24 ★★★★ Le concierge –

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Indication ▼ Correction ▼ [1288]

4 Couple de variables aléatoires

Exercice 25 ★ Loi du deuxième pile –

On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$. On note X (respectivement Y) le rang du premier (respectivement du deuxième) pile.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. En déduire la loi de Y.

Indication ▼ Correction ▼ [3481]

Exercice 26 ★★ **Couple géométrique –**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans *, telles que :

$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\frac{a}{2^{i+j}},$$

pour tous i,j de *.

1. Calculer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Indication ▼ Correction ▼ [1282]

Exercice 27 ★★ **Couple géométrique –**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. On pose $Z=\min(X,Y)$ et $q=1-p$. Soit en outre n un entier strictement positif.

1. Calculer $P(X\geq n)$.
2. Calculer $P(Z\geq n)$. En déduire $P(Z=n)$. Quelle est la loi de Z ?
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Indication ▼ Correction ▼ [2031]

Exercice 28 ★★★ **Naissances –**

On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p\in]0,1[$ et celle que ce soit un garçon est $q=1-p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par familles, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N,X).
2. En déduire la loi de X et celle de Y.

Indication ▼ Correction ▼ [2032]

5 Inégalités, estimation

Exercice 29 ★ **Lancer de dé –**

On jette 3600 fois un dé équilibré à 6 faces. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Indication ▼ Correction ▼ [2026]

Exercice 30 ★ **Pièces défectueuses –**

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_n/n approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon>0$, $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Indication ▼ Correction ▼ [2040]

Exercice 31 ★ Majoration de probabilités et loi géométrique –

Soit $n \geq 1$ un entier et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(1/n)$.

1. Montrer que $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $P(|X-n| \geq n) \leq 1-\frac{1}{n}$. En déduire que $P(X \geq 2n) \leq 1-\frac{1}{n}$.

Indication ▼ Correction ▼ [2028]

Exercice 32 ★★★★ Une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev –

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $E(X)=m$ et une variance $V(X)=\sigma^2$. On fixe $\alpha>0$.

1. Soit $\lambda \geq 0$. Démontrer que $P(X-m \geq \alpha) = P(X-m+\lambda \geq \alpha+\lambda)$.
2. Vérifier que $E((X-m+\lambda)^2) = \sigma^2+\lambda^2$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda>0$, $P(X-m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$.
4. En déduire que $P(X-m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$.
5. Démontrer que $P(|X-m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$. Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Indication ▼ Correction ▼ [2027]

Exercice 33 ★★★★ Inégalité de Cantelli –

Soit X une variable aléatoire réelle et $a>0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $P\big(X-E(X) \geq a\big) \leq \frac{t^2+V(X)}{(a+t)^2}$.
2. En déduire que $P\big(X-E(X) \geq a\big) \leq \frac{V(X)}{V(X)+a^2}$.
3. Démontrer l'inégalité de Cantelli : $P\big(|X-E(X)| \geq a\big) \leq \frac{2V(X)}{V(X)+a^2}$. Comparer avec l'inégalité de Tchebychev.

Indication ▼ Correction ▼ [3144]

6 Fonction génératrice

Exercice 34 ★★ Quand a-t-on une loi discrète infinie ? –

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k sont tels que la suite (p_n) définie, pour $n \geq 0$, par $p_n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

Indication ▼ Correction ▼ [2029]

Exercice 35 ★★ Somme de deux lois de Poisson –

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z=X+Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Indication ▼ Correction ▼ [2030]

Exercice 36 ★★★★ Somme aléatoire de variables aléatoires –

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{T},P)$, de même loi, et soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathscr{T},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $Y_0=N$ et $Y_n=X_n$ si $n\geq 1$ est une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que la variable aléatoire S définie sur Ω par

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

1. Montrer que $G_S = G_N \circ G_{X_1}$ sur $[0,1]$.

2. En déduire que si N et X_1 sont d'espérance finie, alors S est d'espérance finie et $E(S) = E(N)E(X_1)$.

Indication ▼ Correction ▼ [3493]

7 Exercices théoriques

Exercice 37 ★★ Donné par une contrainte –

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = pP(X \geq n)$. Déterminer la loi de X.

Indication ▼ Correction ▼ [1276]

Exercice 38 ★★★★ Une autre expression de l'espérance –

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans .
Montrer que, pour tout $n \in^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance. Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

2. Montrer que, pour tout $n \in^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

3. On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

4. Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

5. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X. A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$. A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera. En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

6. Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.

7. A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.

8. A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.

9. En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1296]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile, et pour les lancers précédents, penser à la loi binomiale.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Introduire P_k (resp. F_k) l'événement "on obtient pile" (resp. face) au $k-$ième lancer.
2. Raisonner par disjonction de cas en utilisant la formule des probabilités totales, suivant la valeur du premier lancer !
3. Revoir les suites récurrentes d'ordre 2.
4.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. L'événement $X = n$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $n+2$-ième tirage donne un pile.
2. Il suffit de savoir sommer les séries du type $\sum kp^k$.
3. Calculer les probabilités $P(Y = k|X = n)$, puis utiliser la formule des probabilités totales.
4. On a $Z = h$ si, et seulement si, il existe j avec $Y = j$ et $X = h+j$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Utiliser deux variables : une désignant l'instant, et une désignant le spot allumé.
2. Utiliser la formule des probabilités composées.
3. Pour $(X = 2)$, il y a plusieurs possibilités : ou bien S_1 reste allumé à l'instant 1, et c'est S_3 qui s'allume ensuite, ou bien c'est S_3 qui est allumé à l'instant 1, et nécessairement c'est S_2 qui s'allume ensuite.
4. Raisonner par disjonction de cas, en fonction du dernier instant d'allumage de S_1.
5.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Dériver la série géométrique.
2. Se demander d'abord quelle est la loi de chaque X_i.
3. Remarquer que $T = n$ si et seulement si $S_{n-1} = 5$ et $X_n = 1$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1.
2. Utiliser la formule des probabilités composées.
3. Utiliser
$$(Y_{n+1} = 1) = ((Y_n = 1) \cap N_{n+1}) \cup ((Y_n = 2) \cap R_{n+1}).$$
4. La suite (v_n) est géométrique.
5. Utiliser $(Z = n) = (Y_n = 0) \backslash (Y_{n-1} = 0)$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Calculer le quotient $P(X = k+1)/P(X = k)$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Calculer $P(X = k+1)/P(X = k)$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1.
2.
3.

4. La somme de variables indépendantes suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Utiliser la formule des probabilités totales. Il faut aussi triturer la somme un petit peu (ne sommer que sur les termes non nuls, puis faire un changement d'indices pour retrouver la fonction exponentielle...).

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Noter D l'événement : "l'objet est défectueux". L'énoncé donne $P(D|A)$ et $P(D|B)$: il faut retrouver les probabilités conditionnelles dans l'autre sens, par exemple en utilisant la formule de Bayes.

2. C'est du cours ! La probabilité que $X = k$ sachant que $Y = n$ est la probabilité que parmi n objets donc chacun peut présenter un défaut avec une probabilité p, les défauts étant indépendants les uns des autres, il y en ait exactement k défectueux. Ecrire $P(X = k) = \sum_{n\geq 0} P(X = k|Y = n)$.

3. C'est du cours !

4. La probabilité que $X = k$ sachant que $Y = n$ est la probabilité que parmi n objets donc chacun peut présenter un défaut avec une probabilité p, les défauts étant indépendants les uns des autres, il y en ait exactement k défectueux.

5. Ecrire $P(X = k) = \sum_{n\geq 0} P(X = k|Y = n)$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Dans le calcul de $p-q$, reconnaitre le développement en série entière de e^{-a}.

2.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Commencer par calculer $P(X \geq k)$ pour tout $k \geq 1$.

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Somme d'une suite géométrique. Appliquer la définition de la probabilité conditionnelle.

2. Somme d'une suite géométrique.

3. Appliquer la définition de la probabilité conditionnelle.

4. Procéder par récurrence. Comment déduire la valeur de $P(X = n)$ connaissant la valeur de $P(X > k)$ pour tout k ?

5. Procéder par récurrence.

6. Comment déduire la valeur de $P(X = n)$ connaissant la valeur de $P(X > k)$ pour tout k ?

Indication pour l'exercice 16 ▲

L'événement $Y > X$ est la réunion des événements disjoints $X = k, Y > k$, pour k allant de 1 à $+\infty$.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Il s'agit simplement de calculer la somme d'une série géométrique.

2. On a $Z > n$ si et seulement si $X > n$ et $Y > n$.

3. $P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n)$.

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Distinguer trois cas suivant les valeurs de n et m. Utiliser la formule des probabilités totales.

2. Distinguer trois cas suivant les valeurs de n et m.

3. Utiliser la formule des probabilités totales.
4. On a $Z > m$ si et seulement si $X > m$ ou $Y > m$. Utiliser que $P(Z = m) = P(Z > m-1) - P(Z > m)$.
5.
6. On a $Z > m$ si et seulement si $X > m$ ou $Y > m$.
7. Utiliser que $P(Z = m) = P(Z > m-1) - P(Z > m)$.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Loi géométrique.
2.
3. Appliquer la loi forte des grands nombres.

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Partir de $x_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{P(X \geq n+1)}$ et exprimer $P(X \geq n+1)$ en fonction des x_k et des p_k.
2. Utiliser la question précédente !

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Reconnaitre le schéma d'une loi classique. On cherche la probabilité de $P(X \geq 1)$.
2. Reconnaitre le schéma d'une loi classique.
3. On cherche la probabilité de $P(X \geq 1)$.
4. Reconnaitre le schéma d'une loi binomiale. On séparera le cas $k \leq n$ du cas $k > n$. Utiliser la formule définissant une probabilité conditionnelle. On fera la même séparation de cas. On rappelle que $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k/k! = e^{\lambda}$. Il faut juste aller doucement, et faire un changement d'indice dans la somme.
5. Reconnaitre le schéma d'une loi binomiale. On séparera le cas $k \leq n$ du cas $k > n$.
6. Utiliser la formule définissant une probabilité conditionnelle. On fera la même séparation de cas.
7. On rappelle que $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k/k! = e^{\lambda}$. Il faut juste aller doucement, et faire un changement d'indice dans la somme.
8. Reconnaitre une loi géométrique.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. C'est du cours !
2. Calculer $P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n)$, en traduisant l'événement $A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n$ directement sur la suite de tirages.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1.
2. Utiliser la formule des probabilités totales.
3. Se rappeler de la formule de l'espérance d'une loi géométrique. Pour démontrer que $E(X) \geq 2$, on pourra étudier la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$.
4.
5.
6. Décomposer l'événement $S = k$ en fonction des événements $(X = i) \cap (Y = k - i)$.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Noter X la variable aléatoire du nombre d'essais à effectuer avant d'ouvrir la porte. Il faut chercher la loi de X. Il est peut-être plus facile de trouver $P(X > k)$.

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Écrire l'événement $(X = i, Y = j)$ en fonction des résultats des lancers.

2. Il y a une méthode générale pour déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple.

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Il faut que la somme sur i et j fasse 1.
2. Utiliser la définition.
3. Comparer $P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$ et $P(X=i)\times P(Y=j)$.

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. Écrire cet événement comme une somme.
2. $Z \geq n$ si et seulement si $X \geq n$ et $Y \geq n$.
3.

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Calculer la probabilité conditionnelle $P(X=k|N=n)$.
2. Retrouver la loi marginale à partir de la loi du couple.

Indication pour l'exercice 29 ▲

Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. C'est du cours.
2. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X_n.
3.

Indication pour l'exercice 31 ▲

La première inégalité est une conséquence de l'inégalité de Markov, la seconde de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Indication pour l'exercice 32 ▲

1.
2. Linéarité de l'espérance.
3. Appliquer l'inégalité de Markov à une bonne variable aléatoire.
4. Étudier une fonction.
5.

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. S'inspirer de la preuve de l'inégalité de Tchebychev en utilisant la variable aléatoire $Y = X - E(X) + t$.
2. Optimiser en t.
3. Appliquer l'inégalité précédente à $Z = -X$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Que doit valoir $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$?

Indication pour l'exercice 35 ▲

Faire le produit de Cauchy des deux séries.

Indication pour l'exercice 36 ▲

1.
2.

Indication pour l'exercice 37 ▲

Déterminer d'abord $P(X=1)$ (facile !) puis de proche en proche, $P(X=2)$, etc...

Indication pour l'exercice 38 ▲

1.
2.
3.

Correction de l'exercice 1 ▲

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r, r+1, \dots, \}$. Soit $k \geq r$. Remarquons que si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X = k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au $k-$ième lancer. L'événement $(X = 2)$ correspond à :

$$(X = 2) = P_1 P_2 \implies p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

De même,

$$(X = 3) = F_1 P_2 P_3 \implies p_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Pour $(X = 4)$, cela se corse un peu !

$$(X = 4) = F_1 F_2 P_3 P_4 \cup P_1 F_2 P_3 P_4 \implies p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 : pour obtenir $X = n$, on peut :

ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer. Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X = 2$), donc avec une probabilité de 1/3. Puis il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$-ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}. On a donc

$$P(X = n | P_1) = \frac{1}{3} p_{n-2} \text{ et } P(P_1) = \frac{2}{3}.$$

ou bien avoir obtenu face au 1er lancer. Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}. On a donc

$$P(X = n | F_1) = p_{n-1} \text{ et } P(F_1) = \frac{1}{3}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}.$$

3. ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer. Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X = 2$), donc avec une probabilité de 1/3. Puis il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$-ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}. On a donc

$$P(X = n | P_1) = \frac{1}{3} p_{n-2} \text{ et } P(P_1) = \frac{2}{3}.$$

4. ou bien avoir obtenu face au 1er lancer. Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}. On a donc

$$P(X = n | F_1) = p_{n-1} \text{ et } P(F_1) = \frac{1}{3}.$$

5. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2 = r/3 + 2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement que, pour $n \geq 2$, on a

$$p_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes (p_2 et p_3). On obtient :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $n = 1$ puisqu'on a alors $p_1 = 0$.

6. Il est bien connu que pour tout $q \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

(cette formule s'obtient en dérivant la formule donnant la somme d'une série géométrique). On en déduit, après un peu de calculs :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{15}{4}.$$

En moyenne, si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, il faudra 15/4 lancers (non entier !) pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. L'événement $X = n$ correspond au déroulement suivant : on a fait $n+2$ tirages, n amenant face, et 2 amenant pile. Le $n+2$-ième tirage était un pile, et il y a avait un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages. Il y a donc $n+1$ choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire correspondant a une probabilité qui vaut $p^2(1-p)^n$. On a donc :

$$P(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n.$$

2. Puisque $p \in]0,1[$, on a $n(n+1)(1-p)^n = o(1/n^2)$ et la série définisant $E(X)$ est donc convergente. Pour calculer sa somme, il faut se souvenir des 3 formules suivantes, qui se déduisent de la théorie des séries entières, valables pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Écrivant $n(n+1) = n(n-1) + 2n$, on trouve

$$\begin{aligned} E(X) &= p^2 \sum_{n\geq 0} n(n-1)(1-p)^n + 2p^2 \sum_{n\geq 0} n(1-p)^n \\ &= p^2(1-p)^2\frac{2}{p^3} + 2p^2(1-p)\frac{1}{p^2} \\ &= \frac{2(1-p)^2}{p} + 2(1-p) \\ &= \frac{2(1-p)}{p}. \end{aligned}$$

3. Si $n \geq 1$ est fixé, et $k \in \{0,\dots,n\}$, on a clairement :

$$P(Y = k|X = n) = \frac{1}{n+1}.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k|X = n)P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (n+1)p^2(1-p)^n \frac{1}{n+1} = p(1-p)^k. \end{aligned}$$

On reconnait que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. On a donc :

$$E(Y)=\frac{1}{p}-1=\frac{1-p}{p}.$$

Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.

4. On a :

$$(Z=h)=\bigcup_{j=0}^{\infty}\left[(Y=j)\cap(X=h+j)\right].$$

Cette réunion étant disjointe, il vient :

$$\begin{aligned}P(Z=h) &= \sum_{j=0}^{\infty}P(Y=j|X=h+j)P(X=h+j)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}p^2(1-p)^{h+j}\\ &= p(1-p)^h.\end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}P[(Z=h),(Y=j)] &= P(X=h+j,Y=j)=P(Y=j|X=h+j)P(X=h+j)\\ &= p^2(1-p)^{h+j}.\end{aligned}$$

Ceci est égal à $P(Z=h)\times P(Y=j)$. Les variables aléatoires sont indépendantes.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On va utiliser deux variables : t qui désigne l'instant où l'on est, et k qui désigne le spot allumé à l'instant courant. Une fonction possible est : def simulspot() : t=0 k=1 while (k !=2) : t=t+1 if (k==1) : k=random.randint(1,4) else : k=k-1 return t

2. Si le spot reste constamment allumé jusqu'à l'instant n, c'est qu'il y a eu la succession d'événement A_k : "le spot S_1 est éclairé à l'instant k". Par la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$P(A_1\cap\dots\cap A_n)=P(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\dots P(A_2|A_1)P(A_1)=\frac{1}{4^n}.$$

3. Clairement(!), on a $P(X=1)=1/4$. D'autre part, $(X=2)$ est réalisé, soit si le spot S_1 reste allumé à l'instant 1 et le spot S_2 s'allume à l'instant 2, soit si le spot S_3 s'allume à l'instant 1 (et S_2 s'allumera automatiquement à l'instant 2). Ces deux cas sont disjoints, donc :

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}.$$

4. Soit $n\geq 3$. S_2 s'allume pour la première fois à l'instant n si et seulement si :

Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-1$, et S_2 s'allume à l'instant n. Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-2$, et S_3 s'allume à l'instant $n-1$. Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-3$, et S_4 s'allume à l'instant $n-2$.

Ces cas étant disjoints, on obtient :

$$\forall n\geq 3,\ P(X=n)=\frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{4}+\frac{1}{4^{n-2}}\frac{1}{4}+\frac{1}{4^{n-3}}\frac{1}{4}=\frac{21}{4^n}.$$

5. Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-1$, et S_2 s'allume à l'instant n.
6. Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-2$, et S_3 s'allume à l'instant $n-1$.
7. Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-3$, et S_4 s'allume à l'instant $n-2$.
8. La convergence de la série étant évidente, on obtient :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)\\ &= \frac{1}{4}+\frac{5}{8}+21\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{4^n}.\end{aligned}$$

La somme de la série se calcule en utilisant $\sum_{n\geq 0} x^n = 1/(1-x)$ pour $|x|<1$. En dérivant cette égalité, on a

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On fait $x = 1/4$ et on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-(1/4))^2} = \frac{4}{9}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{72}.$$

On obtient finalement :

$$E(X) = \frac{7}{3}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On rappelle que la série géométrique $S(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à 1. Sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$. Le résultat vient alors du calcul de la r-ième dérivée de cette série entière (rappelons que l'on peut dériver terme à terme une série entière dans son intervalle ouvert de convergence).

2. S_n représente le nombre de points perdus après n jours. Chaque X_i est une variable aléatoire de Bernoulli, indépendante. De plus,

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

par indépendance des événements "dépasser la vitesse" et "être contrôlé". S_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{20}$. Par les formules du cours, on a

$$E(S_n) = \frac{n}{20},\ V(S_n) = \frac{1\times 19}{20\times 20} n = \frac{19}{400} n.$$

3. T prend, outre la valeur 0, des valeurs $n \geq 6$. On a $T = n$ si et seulement si $S_{n-1} = 5$ et $X_n = 1$. Par indépendance de ces événements, on a donc pour $n \geq 6$,

$$P(T = n) = P(S_{n-1} = 5)P(X_n = 1) = \binom{n-1}{5} \left(\frac{1}{20}\right)^6 \left(\frac{19}{20}\right)^{n-6}.$$

Reste à calculer $P(T = 0)$. On a

$$P(T=0) = 1 - \sum_{n\geq 6} P(T=n).$$

Mais, d'après le rappel effectué à la première question,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 6} P(T=n) &= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n\geq 6} (n-1)\cdots(n-5)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-6} \\
&= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n\geq 5} n\cdots(n-5+1)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-5} \\
&= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \frac{5!}{(1-\frac{19}{20})^6} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(T = 0) = 0$, ce qui signifie que Rémi va perdre presque sûrement son permis. Le calcul de l'espérance suit la même méthode :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 6} nP(T=n) &= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n\geq 6} n(n-1)\dots(n-5)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-6} \\
&= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \frac{6!}{(1-\frac{19}{20})^7} \\
&= 120.
\end{aligned}$$

En moyenne, Rémi va conserver son permis à peine 4 mois !

Correction de l'exercice 6 ▲

Dans tous l'exercice, on notera B_n l'événément "le n-ème tirage donne une boule blanche" et N_n l'événement "le n-ème tirage donne une boule noire".

1. Y_1 est à valeurs dans $\{1,2\}$. De plus,

$$P(Y_1=1)=P(B_1)=\frac{2}{3} \text{ et } P(Y_1=2)=P(N_1)=\frac{1}{3}.$$

2. L'événement $(Y_n=2)$ est égal à l'événement $N_1\cap\dots\cap N_n$. Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P(Y_n=2)&=P(N_n|N_1\cap\dots\cap N_{n-1})P(N_{n-1}|N_1\cap\dots\cap N_{n-2})\cdots P(N_1)\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

3. On a déjà démontré que $u_1=2/3$. De plus, on a

$$(Y_{n+1}=1)=((Y_n=1)\cap N_{n+1})\cup((Y_n=2)\cap B_{n+1}).$$

Ces événements étant incompatibles, on en déduit que

$$P(Y_{n+1}=1)=P((Y_n=1)\cap N_{n+1})+P((Y_n=2)\cap B_{n+1}).$$

Par la formule des probabilités composées,

$$P((Y_n=1)\cap N_{n+1})=P(N_{n+1}|Y_n=1)P(Y_n=1)=\frac{2}{3}u_n$$

et

$$P((Y_n=2)\cap B_{n+1})=P(R_{n+1}|Y_n=2)P(Y_n=2)=\frac{2}{3^{n+1}}.$$

On obtient bien le résultat demandé.

4. On a, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+1}}\\&=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3^{n+1}}\\&=\frac{2}{3}\left(u_n+\frac{2}{3^n}\right)\\&=\frac{2}{3}v_n.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $2/3$. De plus,

$$v_1=u_1+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=\frac{4}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{2}{3^n}=\frac{2(2^n-1)}{3^n}.$$

5. Puisque Y_n prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$, on a

$$P(Y_n=0)=1-P(Y_n=1)-P(Y_n=2)=\frac{3^n+1-2^{n+1}}{3^n}.$$

On a aussi

$$E(Y_n)=0P(Y_n=0)+1P(Y_n=1)+2P(Y_n=2)=2\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

6. La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{1,2\}$. Pour $n\geq 2$, on a

$$(Z=n)=(Y_n=0)\backslash(Y_{n-1}=0).$$

Puisque l'événement $Y_{n-1}=0$ est contenu dans l'événement $Y_n=0$, on a

$$P(Z=n)=P(Y_n=0)-P(Y_{n-1}=0)=\frac{2^n-2}{3^n}$$

(remarquons que cette formule fonctionne encore pour $n=1$). Reste à déterminer $P(Z=0)$: par différence,

$$\begin{aligned}P(Z=0)&=1-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n-2}{3^n}\\&=1-\frac{4/9}{1-2/3}+\frac{2/9}{1-1/3}=0.\end{aligned}$$

Ainsi, presque sûrement, l'urne ne contient plus que des boules noires après un temps fini. Finalement, l'espérance de Z est donnée par

$$\begin{aligned}E(Z)&=\sum_{n=1}^{+\infty}nP(Z=n)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=\frac{2/3}{(1-2/3)^2}-\frac{2/3}{(1-1/3)^2}=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Remarquons que le calcul précédent est justifié par le fait que tous les termes sont positifs.

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\lambda}{k+1}.$$

La suite est décroissante si et seulement si ce rapport est toujours inférieur ou égal à 1. Il atteint sa valeur maximale pour $k=0$, et donc la suite est décroissante si et seulement si $\lambda\leq 1$.

Correction de l'exercice 8 ▲

On a

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\lambda}{k+1}$$

d'où

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}\geq 1\iff k\leq\lambda-1.$$

On distingue alors trois cas :

1. Si $\lambda-1<0$, c'est-à-dire $\lambda\in]0,1[$, la suite $(P(X=k))$ est strictement décroissante, et donc son maximum est atteint en $P(X=0)$.

2. si λ est un entier, la suite est strictement croissante jusque $\lambda-1$, strictement décroissante à partir de λ et le maximum est atteint en deux points : $P(X=\lambda-1)$ et $P(X=\lambda)$.

3. Si λ n'est pas un entier, la suite est strictement croissante jusque $\lfloor\lambda-1\rfloor+1$, puis strictement décroissante ensuite. La valeur maximale est donc $P(X=\lfloor\lambda\rfloor)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de malades se présentant pour une intervention chirurgicale d'urgence dans cet hôpital. Alors X suit une loi de Poisson de paramètre 8, et on cherche $P(X \geq 11)$, ou encore $1 - P(X \leq 10)$. A l'aide d'un tableur, on trouve grâce à la formule `=1-LOI.POISSON(10,8,1)` une probabilité d'environ 0,184. Numérotons les hôpitaux de 1 à 10 et notons A_k l'événement : "le k-ième hôpital est saturé". Alors on sait que $P(A_k) \simeq 0{,}13$. L'événement B "aucun hôpital n'est saturé" est égal à

$$B = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{10}}.$$

Comme les événements $A_1, \dots, A_{10}$ sont indépendants, on a

$$P(B) = \prod_{i=1}^{10} P(\overline{A_i}) = (1 - P(A_1))^{10}.$$

Finalement, la probabilité recherchée vaut

$$1 - P(B) = 1 - (1 - P(A_1))^{10} \simeq 0{,}87.$$

2. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de malades se présentant pour une intervention chirurgicale d'urgence dans cet hôpital. Alors X suit une loi de Poisson de paramètre 8, et on cherche $P(X \geq 11)$, ou encore $1 - P(X \leq 10)$. A l'aide d'un tableur, on trouve grâce à la formule `=1-LOI.POISSON(10,8,1)` une probabilité d'environ 0,184.

3. Numérotons les hôpitaux de 1 à 10 et notons A_k l'événement : "le k-ième hôpital est saturé". Alors on sait que $P(A_k) \simeq 0{,}13$. L'événement B "aucun hôpital n'est saturé" est égal à

$$B = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{10}}.$$

Comme les événements $A_1, \dots, A_{10}$ sont indépendants, on a

$$P(B) = \prod_{i=1}^{10} P(\overline{A_i}) = (1 - P(A_1))^{10}.$$

Finalement, la probabilité recherchée vaut

$$1 - P(B) = 1 - (1 - P(A_1))^{10} \simeq 0{,}87.$$

4. Notons X_k la variable aléatoire égale au nombre de malades se présentant pour une intervention chirurgicale d'urgence dans l'hôpital k, et $Y = X_1 + \cdots + X_{10}$. On cherche $P(Y \geq 101)$. Or, chaque X_k suit une loi de Poisson de paramètre 8, et les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{10}$ sont indépendantes. Donc Y suit une loi de Poisson de paramètre 80. En raisonnant comme à la première question, on trouve $P(Y \geq 101) \simeq 0{,}013$. C'est beaucoup moins !

Correction de l'exercice 10 ▲

On remarque d'abord que Y est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k | X = n) P(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{e^{-p\lambda} (\lambda p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Y suit donc une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda p)$.

Correction de **l'exercice 11 ▲**

1. Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$ Soit $D =$"l'objet est défectueux". On a $P(D|A) = 0.1$ et $P(D|B) = 0.2$ et comme (A,B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) \\ &= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.14. \end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine A" est $P(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1\cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine A en une heure.

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$ Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n, qui sont défectueux indépendemment les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et 0.1. En particulier, $P[X = k|Y = n] = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$ et $P[X = k|Y = n] = \binom{n}{k}0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$ Comme $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = k|Y = n]P(Y = n)$$

série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n \geq k$ ou $n < k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{M} P[X = k|Y = n]P(Y = n) &= \sum_{n=0}^{k-1} P[X = k|Y = n]P(Y = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^{M} P[X = k|Y = n]P(Y = n) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!(n-k)!n!}(0.9\cdot 20)^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{M} \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\ &\to \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!} \end{aligned}$$

donc $X \hookrightarrow \mathscr{P}(2)$

3. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$

4. Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n, qui sont défectueux indépendemment les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et 0.1. En particulier, $P[X = k|Y = n] = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$ et $P[X = k|Y = n] = \binom{n}{k}0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$

5. Comme $(Y=n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P[X=k|Y=n]\,P(Y=n)$$

série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n\geq k$ ou $n<k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M}P[X=k|Y=n]\,P(Y=n) &= \sum_{n=0}^{k-1}P[X=k|Y=n]\,P(Y=n)\\
&\quad+\sum_{n=k}^{M}P[X=k|Y=n]\,P(Y=n)\\
&= 0+\sum_{n=k}^{M}\binom{n}{k}0.1^k0.9^{n-k}\frac{20^ne^{-20}}{n!}\\
&= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20}\sum_{n=k}^{M}\frac{n!}{k!\,(n-k)!n!}(0.9\cdot 20)^n\\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20}\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{M}\frac{1}{(n-k)!}18^n\\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{M-k}\frac{1}{m!}18^{m+k}\\
&\to \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20}\frac{1}{k!}18^ke^{18}=\frac{2^ke^{-2}}{k!}
\end{aligned}$$

donc $X\hookrightarrow\mathscr{P}(2)$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. On doit déterminer le nombre d'oeufs éclos sachant que n oeufs ont été pondus. On a alors une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes (l'oeuf i éclot) avec probabilité p de réussite à chaque fois. On reconnait donc une loi binomiale et on a

$$P(Z=k|X=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

si $0\leq k\leq n$, $P(Z=k|X=n)=0$ sinon.

2. On va appliquer la formule des probabilités totales : pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \sum_{n\geq k}P(Z=k|X=n)P(X=n)\\
&= \sum_{n\geq k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n\geq k}\frac{(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

On réindexe la somme en posant $u=n-k$. Il vient

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{u\geq 0}\frac{\big(\lambda(1-p)\big)^u}{u!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}e^{\lambda-\lambda p}\\
&= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ainsi, Z suit une loi de Poisson de paramètre λp.

3. L'espérance de Z est donc λp.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Notons également r la probabilité que la partie soit nulle. On sait que $p+q+r=1$ et que $r=P(X=0)=e^{-a}$ d'où $p+q=1-e^{-a}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} p-q &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n+1)-\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=2n) \\ &= e^{-a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{2n}}{2n!}\right) \\ &= e^{-a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n}{n!} \\ &= e^{-a}(1-e^{-a}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$p=\frac{1}{2}(1-e^{-2a}) \text{ et } q=\frac{1}{2}(1-e^{-a})^2.$$

2. Notons G le gain de Pierre. Si $X=2n$, alors $G=-X$, sinon $G=X$. G admet une espérance si la famille $(nP(G=n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire si la famille $(nP(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, ce qui est le cas car X suit une loi de Poisson donc admet une espérance. On a donc

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-2n)\frac{a^{2n}}{(2n)!}e^{-a}+\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-a} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{(-a)^n}{n!}e^{-a} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-a)^n}{(n-1)!}e^{-a} \\ &= -(-a)e^{-a}e^{-a} \\ &= ae^{-2a}. \end{aligned}$$

Remarquons que Pierre est avantagé à ce jeu.

Correction de l'exercice 14 ▲

On commence par remarquer que si $a\leq b$, alors l'événement $(X\geq bn)$ est contenu dans l'événement $(X\geq an)$. Ainsi, $P(X\geq an)/P(X\geq bn)\geq 1$ et la série est grossièrement divergente. Supposons maintenant $a>b$. On commence par calculer, pour $k\geq 1$, $P(X\geq k)$:

$$P(X\geq k)=\sum_{j\geq k}P(X=j)=\sum_{j\geq k}q^{j-1}p=p\frac{q^{k-1}}{1-q}=q^{k-1}$$

où on a noté comme d'habitude $q=1-p$. On a donc, pour tout $n\geq 1$,

$$\frac{P(X\geq an)}{P(X\geq bn)}=q^{(a-b)n}.$$

On a donc affaire à une série géométrique de raison $q^{a-b}\in]0,1[$. La série est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{P(X\geq an)}{P(X\geq bn)}=\sum_{n=1}^{+\infty}q^{(a-b)n}=\frac{q^{a-b}}{1-q^{a-b}}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Notons $q = 1 - p$. On sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = k) = pq^{k-1}$. On en déduit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^m}{1-q} = q^m.$$

On commence par remarquer que $(X > k+n) \cap (X > n) = (X > k+n)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X > k+n | X > n) &= \frac{P\big((X > k+n) \cap (X > n)\big)}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > k+n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{q^{k+n}}{q^n} = q^k = P(X > k). \end{aligned}$$

La variable aléatoire X est bien sans mémoire. Interprétons ceci en termes d'épreuves de Bernoulli. $P(X > m)$ est la probabilité pour que, dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi, le premier succès arrive après la m-ième épreuve. $P_{(X>n)}(X > n+m)$ est la probabilité pour que, dans le même cas, le premier succès arrive après la $n+m$-ième épreuve, sachant que les n premières épreuves ont donné lieu à un échec. Dans ce dernier cas, on peut oublier les n premières épreuves dont on connait le résultat et calculer la probabilité que le premier résultat arrive après m épreuves.

2. Notons $q = 1 - p$. On sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = k) = pq^{k-1}$. On en déduit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^m}{1-q} = q^m.$$

3. On commence par remarquer que $(X > k+n) \cap (X > n) = (X > k+n)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X > k+n | X > n) &= \frac{P\big((X > k+n) \cap (X > n)\big)}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > k+n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{q^{k+n}}{q^n} = q^k = P(X > k). \end{aligned}$$

La variable aléatoire X est bien sans mémoire. Interprétons ceci en termes d'épreuves de Bernoulli. $P(X > m)$ est la probabilité pour que, dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi, le premier succès arrive après la m-ième épreuve. $P_{(X>n)}(X > n+m)$ est la probabilité pour que, dans le même cas, le premier succès arrive après la $n+m$-ième épreuve, sachant que les n premières épreuves ont donné lieu à un échec. Dans ce dernier cas, on peut oublier les n premières épreuves dont on connait le résultat et calculer la probabilité que le premier résultat arrive après m épreuves.

4. Procédons par récurrence. Pour $n \geq 1$, on considère la propriété $\mathscr{P}(n)$ définie par

$$\mathscr{P}(n) = \text{“}P(X > n) = q^n\text{”}.$$

Initialisation : la propriété est vraie au rang 1 par définition de q. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors on a d'une part

$$P(X > n+1 | X > n) = P(X > 1) = q$$

et d'autre part

$$P(X > n+1 | X > n) = \frac{P\big((X > n+1) \cap (X > n)\big)}{P(X > n)} = \frac{P(X > n+1)}{q^n}.$$

On déduit que $P(X > n+1) = q^n \cdot q = q^{n+1}$ et que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on a

$$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) = q^{n-1} - q^n = (1-q)q^{n-1} = pq^{n-1}$$

et donc X suit bien une loi géométrique de paramètre $p=1-q$.

5. Procédons par récurrence. Pour $n\geq 1$, on considère la propriété $\mathscr{P}(n)$ définie par

$$\mathscr{P}(n) = \text{“}P(X>n)=q^n\text{''}.$$

Initialisation : la propriété est vraie au rang 1 par définition de q. Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors on a d'une part

$$P(X>n+1|X>n)=P(X>1)=q$$

et d'autre part

$$P(X>n+1|X>n)=\frac{P\big((X>n+1)\cap(X>n)\big)}{P(X>n)}=\frac{P(X>n+1)}{q^n}.$$

On déduit que $P(X>n+1)=q^n\cdot q=q^{n+1}$ et que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geq 1$.

6. Pour $n\geq 1$, on a

$$P(X=n)=P(X>n-1)-P(X>n)=q^{n-1}-q^n=(1-q)q^{n-1}=pq^{n-1}$$

et donc X suit bien une loi géométrique de paramètre $p=1-q$.

Correction de l'exercice 16 ▲

L'événement $Y>X$ est la réunion des événements disjoints $X=k, Y>k$, pour k allant de 1 à $+\infty$. Par indépendance des variables aléatoires X et Y, on a $P(X=k,Y>k)=P(X=k)\times P(Y>k)$. De plus, puisque X et Y suivent des lois géométriques, on sait que

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1} \text{ et } P(Y>k)=(1-q)^k.$$

On en déduit que

$$P(Y>X)=\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-q)\big((1-p)(1-q)\big)^{k-1}=\frac{p(1-q)}{1-(1-p)(1-q)}=\frac{p-pq}{p+q-pq}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Il s'agit simplement de calculer la somme d'une série géométrique : pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}P(X>n)&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)\\&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}p_1q_1^{k-1}\\&=p_1\frac{q_1^n}{1-q_1}\\&=q_1^n\end{aligned}$$

où on a posé $q_1=1-p_1$.

2. Remarquons que $Z>n$ si et seulement $X>n$ et $Y>n$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned}P(Z>n)&=P(X>n)\times P(Y>n)\\&=q_1^nq_2^n\end{aligned}$$

3. La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On remarque que pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'événement $Z>n-1$ est la réunion disjointe de $Z>n$ et $Z=n$. Ainsi,

$$P(Z>n-1)=P(Z>n)+P(Z=n).$$

Il vient

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= q_1^{n-1}q_2^{n-1} - q_1^n q_2^n \\ &= q_1^{n-1}q_2^{n-1}(1-q_1q_2) \end{aligned}$$

Si on pose $q = q_1q_2$ et $p = 1-q$, alors

$$p = 1-q_1q_2$$

et $P(Z=n) = pq^{n-1}$. La variable aléatoire Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 1-q_1q_2 = 1-(1-p_1)(1-p_2)$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X,Y)$.

Remarquons qu'il est d'abord impossible que $T > Z$. Ainsi, si $n > m$, on a $P((Z=m)\cap(T=n)) = 0$. Ensuite, si $n = m$, alors on doit avoir $X = Y = m$, et comme les variables aléatoires sont indépendantes

$$P((Z=m)\cap(T=n)) = P((X=m)\cap(Y=m)) = p^2q^{2(m-1)}.$$

Enfin, si $n < m$, l'événement $(Z=m)\cap(T=n)$ est égal à la réunion des deux événements disjoints $(X=m)\cap(Y=n)$ et $(X=n)\cap(Y=m)$. La probabilité de chacun de ces événements étant $p^2q^{m-1}q^{n-1}$, on a dans ce cas

$$P((Z=m)\cap(T=n)) = 2p^2q^{m-1}q^{n-1}.$$

On va utiliser la formule des probabilités totales. En effet, les événements $(Y=n)$, pour n parcourant $\mathbb{N}^*$, forment un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} P(Z=m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((Z=m)\cap(T=n)) \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} 2p^2q^{m-1}q^{n-1} + p^2q^{2m-2} \\ &= 2p^2q^{m-1}\frac{1-q^{m-1}}{1-q} + p^2q^{2m-2} \\ &= 2pq^{m-1} - 2pq^{2m-2} + p^2q^{2m-2}. \end{aligned}$$

2. Remarquons qu'il est d'abord impossible que $T > Z$. Ainsi, si $n > m$, on a $P((Z=m)\cap(T=n)) = 0$. Ensuite, si $n = m$, alors on doit avoir $X = Y = m$, et comme les variables aléatoires sont indépendantes

$$P((Z=m)\cap(T=n)) = P((X=m)\cap(Y=m)) = p^2q^{2(m-1)}.$$

Enfin, si $n < m$, l'événement $(Z=m)\cap(T=n)$ est égal à la réunion des deux événements disjoints $(X=m)\cap(Y=n)$ et $(X=n)\cap(Y=m)$. La probabilité de chacun de ces événements étant $p^2q^{m-1}q^{n-1}$, on a dans ce cas

$$P((Z=m)\cap(T=n)) = 2p^2q^{m-1}q^{n-1}.$$

3. On va utiliser la formule des probabilités totales. En effet, les événements $(Y=n)$, pour n parcourant $\mathbb{N}^*$, forment un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} P(Z=m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((Z=m)\cap(T=n)) \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} 2p^2q^{m-1}q^{n-1} + p^2q^{2m-2} \\ &= 2p^2q^{m-1}\frac{1-q^{m-1}}{1-q} + p^2q^{2m-2} \\ &= 2pq^{m-1} - 2pq^{2m-2} + p^2q^{2m-2}. \end{aligned}$$

4. Méthode 2 :
On a

$$P(X>m)=\sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1}=\frac{pq^m}{1-q}=q^m.$$

Remarquons que l'on a $Z>m$ si et seulement si $X>m$ ou $Y>m$. Utilisant la formule $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, on trouve

$$P(Z>m)=P(X>m)+P(Y>m)-P((X>m)\cap(Y>m))=2q^m-q^{2m}.$$

Remarquons que l'événement $(Z>m-1)$ est réunion disjointe des événements $(Z>m)$ et $Z=m$. On en déduit

$$P(Z>m-1)=P(Z>m)+P(Z=m)$$

soit encore

$$P(Z=m)=P(Z>m-1)-P(Z>m)=2q^{m-1}-q^{2m-2}-2q^m+q^{2m}.$$

Utilisant $p=1-q$, on peut vérifier que les résultats des deux méthodes coïncident.

5. On a

$$P(X>m)=\sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1}=\frac{pq^m}{1-q}=q^m.$$

6. Remarquons que l'on a $Z>m$ si et seulement si $X>m$ ou $Y>m$. Utilisant la formule $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, on trouve

$$P(Z>m)=P(X>m)+P(Y>m)-P((X>m)\cap(Y>m))=2q^m-q^{2m}.$$

7. Remarquons que l'événement $(Z>m-1)$ est réunion disjointe des événements $(Z>m)$ et $Z=m$. On en déduit

$$P(Z>m-1)=P(Z>m)+P(Z=m)$$

soit encore

$$P(Z=m)=P(Z>m-1)-P(Z>m)=2q^{m-1}-q^{2m-2}-2q^m+q^{2m}.$$

Utilisant $p=1-q$, on peut vérifier que les résultats des deux méthodes coïncident.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. X est le temps d'attente du premier "succès" (avoir un garçon), avec probabilité de succès égale à 1/2. On en déduit que X suit une loi géométrique de paramètre 1/2. En particulier, $\mathbb{P}(X=k)=2^{-k}$.

2. Le nombre d'enfants total est $X_1+\dots+X_N$, et le nombre de garçons est N. Ainsi, la proportion P de garçons est $N/(X_1+\dots+X_N)$.

3. Les variables aléatoires X_i sont intégrables, identiquement distribuées, et deux à deux indépendantes. D'après la loi forte des grands nombres, presque sûrement,

$$\frac{N}{X_1+\dots+X_N}=\frac{1}{\frac{X_1+\dots+X_N}{N}}\to\frac{1}{E(X_1)}=1/2.$$

Ainsi, malgré cette politique nataliste, on n'observe pas de déséquilibre entre les filles et les garçons.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. D'après la définition des probabilités conditionnelles, et puisque $(X=n+1)$ est contenu dans $(X\geq n+1)$, on a

$$x_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{P(X\geq n+1)}.$$

Maintenant,

$$P(X\geq n+1)=P(X\geq n)-P(X=n)=\frac{p_n}{x_n}-p_n.$$

Il vient

$$x_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{\frac{p_n}{x_n} - p_n} = \frac{x_n p_{n+1}}{p_n(1-x_n)}.$$

On en déduit que

$$p_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}(1-x_n)p_n.$$

Par une récurrence immédiate, partant de $p_1 = x_1$, on trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = x_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k).$$

2. Supposons d'abord que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Elle est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^{n-1}.$$

On a donc

$$x_n = \frac{P(X=n)}{P(X \geq n)} = \frac{p(1-p)^{n-1}}{(1-p)^{n-1}} = p$$

et le taux de panne est constant. Réciproquement, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont le taux de panne est constant, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{P(X=n)}{P(X \geq n)} = p.$$

D'après la question précédente,

$$P(X=n) = p\prod_{k=0}^{n-1}(1-p) = p(1-p)^{n-1}.$$

C'est bien que X suit une loi géométrique de paramètre p. On peut remarquer qu'on doit avoir nécessairement $p \in]0,1]$ puisque $P(X_n) \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)$ doit être une série convergente de somme 1.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Notons X_i, $i = 1,\dots,4$ valant 1 si le client subit un retard à son i-ème appel et 0 sinon. Les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 1/4$. Puisque $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(4, 1/4)$. En particulier, on a :

$$E(X) = 1 \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}.$$

On cherche $P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

2. Notons X_i, $i = 1,\dots,4$ valant 1 si le client subit un retard à son i-ème appel et 0 sinon. Les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 1/4$. Puisque $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(4, 1/4)$. En particulier, on a :

$$E(X) = 1 \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}.$$

3. On cherche $P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

4. On note $p=0,25$ et $q=1-0,25$. Comme à la première question, on reconnait le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. On a donc :

$$P(Z=k|Y=n)=\begin{cases} \binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \text{si } 0\leq k\leq n \\ 0 & \text{si } k>n \end{cases}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} P(Z=k,Y=n) & = & P(Y=n)P(Z=k|Y=n) \\ & = & \begin{cases} e^{-m}\frac{m^n}{n!}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \text{si } k\leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Il faut réaliser la sommation ! On a, tenant compte du fait que les premiers termes sont nuls :

$$\begin{array}{rcl} P(Z=k) & = & \sum_{n=k}^{+\infty} P(Z=k,Y=n) \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(mq)^n}{(n)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k e^{mq} \\ & = & e^{-mp}\frac{(mp)^k}{k!}. \end{array}$$

Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $m\times 0,25$.

5. On note $p=0,25$ et $q=1-0,25$. Comme à la première question, on reconnait le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. On a donc :

$$P(Z=k|Y=n)=\begin{cases} \binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \text{si } 0\leq k\leq n \\ 0 & \text{si } k>n \end{cases}$$

6. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(Z=k,Y=n) & = & P(Y=n)P(Z=k|Y=n) \\ & = & \begin{cases} e^{-m}\frac{m^n}{n!}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \text{si } k\leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

7. Il faut réaliser la sommation ! On a, tenant compte du fait que les premiers termes sont nuls :

$$\begin{array}{rcl} P(Z=k) & = & \sum_{n=k}^{+\infty} P(Z=k,Y=n) \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(mq)^n}{(n)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k e^{mq} \\ & = & e^{-mp}\frac{(mp)^k}{k!}. \end{array}$$

Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $m\times 0,25$.

8. U est le rang du premier succès au cours d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/4$. U suit donc la loi géométrique $\mathscr{G}(1/4)$, c'est-à-dire que, pour $k\geq 1$,

$$P(U=k)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

On applique la formule du cours pour obtenir l'espérance et on trouve que

$$E(U)=4.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier pile ; elle suit la loi géométrique de paramètre p, donc d'espérance $1/p$.

2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène pile. Les variables X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Soit $(i_1,\dots,i_n)\in^n$. L'événement $(A_1=i_1,\dots,A_n=i_n)$ s'écrit aussi :

$$X_1=\dots=X_{i_1-1}=0,X_{i_1}=1,X_{i_1+1}=\dots=X_{i_1+i_2-1}=0,X_{i_1+i_2}=1,\dots,X_{i_1+\dots+i_n}=1.$$

Donc, en posant $q=1-p$, on a :

$$P(A_1=i_1,\dots,A_n=i_n)=q^{i_1-1}pq^{i_2-1}p\dots q^{i_n-1}p.$$

En sommant pour $(i_1,\dots,i_{n-1})$ parcourant $(^*)^{n-1}$, on a :

$$P(A_n=i_n)=q^{i_n-1}p.$$

(A_n) suit bien une loi géométrique de paramètre p. De plus l'expression ci-dessus prouve que :

$$P(A_1=i_1,\dots,A_n=i_n)=P(A_1=i_1)\dots P(A_n=i_n),$$

ce qui montre que les variables $A_1,\dots,A_n$ sont indépendantes.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. L'événement $(X=i)\cap(Y=j)$ correspond à deux cas :

on obtient i boules noires, puis j boules blanches, puis une boule noire. Cet événement a pour probabilité $p^iq^jp=p^{i+1}q^j$. on obtient i boules blanches, puis j boules noires, puis une boule blanche. Cet événement a pour probabilité $q^ip^jq=p^jq^{i+1}$.

On a donc

$$P(X=i\cap Y=j)=p^{i+1}q^j+p^jq^{i+1}.$$

2. on obtient i boules noires, puis j boules blanches, puis une boule noire. Cet événement a pour probabilité $p^iq^jp=p^{i+1}q^j$.

3. on obtient i boules blanches, puis j boules noires, puis une boule blanche. Cet événement a pour probabilité $q^ip^jq=p^jq^{i+1}$.

4. La famille $(Y=j)_{j\geq 1}$ forme un système complet d'événements. On en déduit que

$$\begin{aligned}P(X=i)&=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=i\cap Y=j)\\&=\sum_{j=1}^{+\infty}p^{i+1}q^j+q^{i+1}p^j\\&=\frac{p^{i+1}q}{1-q}+\frac{q^{i+1}p}{1-p}\\&=p^iq+q^ip\end{aligned}$$

en simplifiant les fractions par la relation $q=1-p$. De la même façon, on trouve pour Y

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i\cap Y=j) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j \\ &= \frac{p^2q^j}{1-p} + \frac{q^2p^j}{1-q} \\ &= p^2q^{j-1} + q^2p^{j-1}. \end{aligned}$$

5. Les sommes $\sum_i ip^i$ et $\sum_i iq^i$ sont convergentes. De plus, d'après la formule donnant l'espérance d'une loi géométrique, on sait que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} ipq^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

On en déduit ici que

$$\begin{aligned} E(X) &= p\sum_{i=1}^{+\infty} qp^{i-1} + q\sum_{i=1}^{+\infty} pq^{i-1} \\ &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Or, posons $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Alors il est facile de voir, en étudiant f (par exemple, en la dérivant), que $f(x) \geq 2$ pour tout $x>0$ (le minimum étant atteint en 1). Puisque $E(X) = f(p/q)$, on en déduit que $E(X) \geq 2$.

6. Le raisonnement est entièrement similaire, et on trouve que

$$\begin{aligned} E(Y) &= p\sum_{j=1}^{+\infty} pq^{j-1} + q\sum_{j=1}^{+\infty} qp^{j-1} \\ &= p\times\frac{1}{p} + q\times\frac{1}{q} = 2. \end{aligned}$$

7. En utilisant le résultat de la première question, on a

$$P(X=n\cap Y=n) = p^{n+1}q^n + q^{n+1}p^n = (p+q)p^nq^n = (pq)^n.$$

On en déduit que

$$P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n\cap Y=n) = \frac{pq}{1-pq}.$$

8. On a $S(\Omega) = \{2,3,\dots,\}$. De plus, l'événement $S=k$ est la réunion disjointe des événements $(X=i)\cap(Y=k-i)$ pour $i=1,\dots,k-1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \sum_{i=1}^{k-1} p^{i+1}q^{k-i} + p^{k-i}q^{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i}{q^i}pq^k + \frac{q^i}{p^i}qp^k. \end{aligned}$$

Si $p=q=1/2$, on obtient

$$P(S=k) = (k-1)pq^k + (k-1)qp^k = \frac{k-1}{2^k}.$$

Si $p\neq q$, alors

$$\begin{aligned} P(S=k) &= pq^k\frac{\frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q}\right)^k}{1-\frac{p}{q}} + p^k\frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\frac{q}{p}} \\ &= \frac{p^2q^k - qp^{k+1} - q^2p^k + pq^{k+1}}{q-p}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Notons X la variable aléatoire du nombre d'essais à effectuer avant d'ouvrir la porte. Il est un peu difficile de calculer directement $P(X=k)$, nous allons plutôt calculer, pour $k=1,\dots,n-1$, $P(X>k)$. L'événement $(X>k)$ est réalisé si et seulement si, la première clé n'a pas convenu et la deuxième clé n'a pas convenu,et..., et la k-ième clé n'a pas convenu. Pour la clé numéro i, il y a avait une clé parmi $n-i+1$ qui convenait. La probabilité que la clé numéro i ne convenait pas est donc $1-\frac{1}{n-i+1}$. Par la formule des probabilités composées, notant A_i l'événement "on fait au moins i essais et le i-ème ne convient pas", on a

$$\begin{aligned}
P(X>k) &= P(A_k)\\
&= P(A_k|A_{k-1})P(A_{k-1}|A_{k-2})\cdots P(A_1)\\
&= \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n-i+1}\right)\\
&= \prod_{i=1}^{k}\frac{n-i}{n-i+1}\\
&= \frac{n-k}{n}.
\end{aligned}$$

On a ensuite

$$P(X=k)=P(X>k-1)-P(X>k)=\frac{1}{n}.$$

Autrement dit, X suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Son espérance (le nombre moyen d'essais pour ouvrir la porte) vaut donc

$$E(X)=\frac{n+1}{2}.$$

2. On garde les mêmes notations. On a cette fois $P(A_i|A_{i-1})=\frac{n-1}{n}$ et donc

$$P(X>k)=\frac{(n-1)^k}{n^k}.$$

On en déduit que

$$P(X=k)=\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}-\frac{(n-1)^k}{n^k}=\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}.$$

En reconnaissant une loi géométrique de paramètre $1/n$, on trouve que le nombre moyen d'essais nécessaires est

$$E(X)=n.$$

Finalement, ce n'est pas si différent !

Correction de l'exercice 25 ▲

1. (X,Y) prend ses valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $i,j\in\mathbb{N}^*$. Alors, si $i\geq j$, on a $(X=i)\cap(Y=j)=\varnothing$ et si $i<j$, l'événement $(X=i)\cap(Y=j)$ est l'événement

$$F_1\cap\cdots\cap F_{i-1}\cap P_i\cap F_{i+1}\cap\cdots\cap F_{j-1}\cap P_j,$$

où F_k (respectivement P_k) désigne l'événement obtenir face (respectivement pile) au k-ème lancer. On a donc

$$P((X,Y)=(i,j))=\begin{cases}0 & \text{si } i\geq j\\ p^2(1-p)^{j-2} & \text{si } i<j.\end{cases}$$

2. La variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{2,3,\dots\}$. Pour $j \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=j) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} P(X=i, Y=j) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} \\
&= (j-1)p^2(1-p)^{j-2}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 26 ▲

1. Il est d'abord nécessaire que $a \geq 0$. On a ensuite :

$$\sum_{i,j\geq 1} \frac{a}{2^{i+j}} = 1 \iff a\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 1 \iff a = 1.$$

2. Pour $i \in^*$, on a :

$$P(X=i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{i-1}}.$$

X suit donc une loi géométrique de paramètre $1/2$. Par raison de symétrie, il en est de même pour Y.

3. On a :

$$P(X=i)\times P(Y=j) = \frac{1}{2^{i+j}} = P\big((X=i)\cap(Y=j)\big).$$

Les variables aléatoires sont indépendantes.

Correction de l'exercice 27 ▲

1. L'événement $X \geq n$ s'écrit comme réunion (dénombrable et disjointe) des événements élémentaires $X = k$, $k \geq n$. On a donc

$$P(X \geq n) = \sum_{k\geq n} P(X=k) = \sum_{k\geq n} q^{k-1}p = \frac{q^{n-1}p}{1-q} = q^{n-1}.$$

2. On a $Z \geq n$ si et seulement si $X \geq n$ et $Y \geq n$. Ces deux événements sont indépendants, et donc

$$P(Z \geq n) = P(X \geq n)P(Y \geq n) = q^{2n-2}.$$

Or,

$$P(Z=n) = P(Z\geq n) - P(Z \geq n+1) = q^{2n-2} - q^{2n} = q^{2n-2}(1-q^2).$$

Ainsi, Z suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

3. Remarquons que les événements $(X=n)\cap(Z\geq n)$ et $(X=n)\cap(Z=n)$ sont égaux et égaux à $(X=n)\cap(Y\geq n)$. Si X et Z étaient indépendantes, alors on aurait

$$P((X=n)\cap(Z\geq n)) = P(X=n)P(Z\geq n)$$

et

$$P((X=n)\cap(Z=n)) = P(X=n)P(Z=n).$$

En particulier, on devrait avoir $P(Z=n) = P(Z\geq n)$, ce qui n'est pas le cas. X et Z ne sont pas des variables aléatoires indépendantes.

Correction de l'exercice 28 ▲

1. La probabilité $P(X=k|N=n)$ est égale $\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ si $k \leq n$ (à nombre de naissances fixé, le nombre de filles suit une loi binomiale de paramètres n et p), et 0 si $k > n$ (ou $k < 0$). On en déduit que

$$P(N=n, X=k) = P(X=k|N=n)P(N=n) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

2. On déduit la loi marginale de X à partir de la loi du couple :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n\geq k} P(X=k, N=n)\\
&= \sum_{n\geq k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}q^{n-k}}{(n-k)!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\lambda^m q^m}{m!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}e^{\lambda q}\\
&= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ainsi, X suit une loi de Poisson de paramètre λp. De même, Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.

Correction de l'exercice 29 ▲

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3600 et 1/6. On sait donc que $E(S) = 600$ et $V(S) = 500$. Remarquons en outre que

$$480 < S < 720 \iff -120 < S - 600 < 120 \iff |S-600| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|S-600| \geq 120) \leq \frac{500}{120^2} \leq 0,035.$$

On en déduit que

$$P(480 < S < 720) \geq 1 - 0,035 = 0,965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieur à 0,96.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi, X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On en déduit que

$$E(X_n) = np \text{ et } V(X_n) = np(1-p).$$

2. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X_n. On a donc

$$P(|X_n - E(X_n)| \geq a) \leq \frac{V(X_n)}{a^2}.$$

Or,

$$\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon \iff |X_n - np| \geq n\varepsilon \iff |X_n - E(X_n)| \geq n\varepsilon.$$

On applique donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $a = n\varepsilon$ et on trouve que

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Mais sur $[0,1]$, la fonction $x \mapsto x(1-x)$ admet un maximum égal à $1/4$ (et atteint en $1/2$). On en déduit le résultat voulu. On pouvait aussi remarquer que c'est directement le résultat qui conduit à la loi faible des grands nombres.

3. On cherche n tel que $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<10^{-2}\right) \geq 0,95$ soit encore, en passant à l'événement contraire $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq 0,05$. Il suffit donc de choisir n tel que $\frac{1}{4n10^{-4}} \leq 0,05$ soit $n \geq 5 \cdot 10^4$.

Correction de l'exercice 31 ▲

Rappelons que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p vaut $\frac{1}{p}$ et que sa variance vaut $\frac{q}{p^2}$, avec $q=1-p$.

1. X étant à valeurs positives de moyenne n, l'inégalité de Markov donne, pour tout $a>0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{n}{a}.$$

On obtient le résultat voulu avec $a=n^2$.

2. On a $V(X)=\left(1-\frac{1}{n}\right)n^2=n(n-1)$. On obtient en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\varepsilon>0$,

$$P(|X-n| \geq \varepsilon) \leq \frac{n(n-1)}{\varepsilon^2}.$$

Pour $\varepsilon=n$, on obtient le résultat voulu. De plus, X étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, les événements $|X-n| \geq n$ et $X \geq 2n$ sont égaux, ce qui donne la deuxième inégalité.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. On a

$$X-m \geq \alpha \iff X-m+\lambda \geq \alpha+\lambda.$$

Les deux événements sont donc identiques et leurs probabilités respectives sont égales.

2. On développe et on utilise la linéarité de l'espérance :

$$E((X-m+\lambda)^2)=E((X-m)^2)+2\lambda E(X-m)+\lambda^2=\sigma^2+\lambda^2.$$

3. On sait que

$$P(X-m \geq \alpha)=P(X-m+\lambda \geq \alpha+\lambda) \leq P((X-m+\lambda)^2 \geq (\alpha+\lambda)^2).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X-m+\lambda)^2$, on en déduit immédiatement le résultat demandé.

4. On étudie la fonction $\varphi(\lambda)=\frac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$. En calculant la dérivée, on voit facilement qu'elle admet un minimum pour $\lambda=\sigma^2/\alpha$, ce minimum valant $\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.

5. On sait que $|X-m| \geq \alpha \iff (X-m) \geq \alpha$ ou $(X-m) \leq -\alpha$. En reprenant les questions précédentes, mais en remplaçant $X-m$ par $m-X$, on trouve que

$$P(|X-m| \geq \alpha)=P(X-m \geq \alpha)+P(m-X \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}.$$

Cette inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si et seulement si

$$\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2} \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \iff \sigma^2(\alpha^2-\sigma^2) \leq 0 \iff \alpha \leq \sigma.$$

Cela dit, dans le cas $\alpha \leq \sigma$, on a

$$\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2} \geq 1,$$

et majorer une probabilité par un réel supérieur ou égal à 1 n'est pas intéressant !

Correction de l'exercice 33 ▲

1. Considérons la variable aléatoire $Y = X - E(X) + t$. On a

$$X - E(X) \geq a \iff X - E(X) + t \geq a + t$$

et ceci entraîne, puisque $a + t \geq 0$,

$$\big(X - E(X) + t\big)^2 \geq (a+t)^2.$$

L'événement $X - E(X) \geq a$ est donc inclus dans l'événement $\big(X - E(X) + t\big)^2 \geq (a+t)^2$. On en déduit

$$\begin{aligned} P\big(X - E(X) \geq a\big) &\leq P\Big(\big(X - E(X) + t\big)^2 \geq (a+t)^2\Big) \\ &\leq \frac{E\Big(\big(X - E(X) + t\big)^2\Big)}{(a+t)^2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov. De plus,

$$\begin{aligned} E\Big(\big(X - E(X) + t\big)^2\Big) &= E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) + 2tE\Big(X - E(X)\Big) + t^2 \\ &= V(X) + 0 + t^2 \\ &= V(X) + t^2. \end{aligned}$$

On a donc démontré que

$$P\big(X - E(X) \geq a\big) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(a+t)^2}.$$

2. On va chercher la valeur de t pour laquelle le membre de droite de l'inégalité précédente est le plus petit possible. Pour cela, on pose, pour $t \geq 0$, $f(t) = \frac{t^2 + V(X)}{(a+t)^2}$. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, sur cet intervalle,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2t(a+t)^2 - 2(a+t)(t^2 + V(X))}{(a+t)^4} \\ &= \frac{2(at - V(X))}{(a+t)^3}. \end{aligned}$$

La fonction f atteint donc son minimum en $t = V(X)/a$, et en ce point elle vaut

$$f(V(X)/a) = \frac{\frac{V(X)^2}{a^2} + V(X)}{\left(\frac{V(X)}{a} + a\right)^2} = \frac{\frac{V(X)}{a}\left(\frac{V(X)}{a} + a\right)}{\left(\frac{V(X)}{a} + a\right)^2} = \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Ceci démontre le resultat demandé.

3. Si on applique l'inégalité précédente à $Z = -X$, qui a la même variance que X, alors on obtient

$$P\Big(-\big(X - E(X)\big) \geq a\Big) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Puisque

$$|X - E(X)| \geq a = \Big(\big(X - E(X)\big) \geq a\Big) \cup \Big(-\big(X - E(X)\big) \geq a\Big),$$

on a bien

$$P\big(|X - E(X)| \geq a\big) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Cette inégalité est meilleure que l'inégalité de Tchebychev si et seulement si

$$\frac{2V(X)}{V(X) + a^2} \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire si et seulement si $V(X) \geq a^2$ (ou $V(X) = 0$).

Correction de l'exercice 34 ▲

Il faut et il suffit que $p_n \geq 0$ pour tout entier n et que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Implicitement, on remarque qu'il faut avoir $a \neq -1$, sinon la suite (p_n) n'est pas définie. On remarque d'abord que l'on ne peut pas avoir $k = 0$, sinon $p_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et la deuxième condition ne peut pas être satisfaite. Le cas $a = 0$ entraîne $k = 1$ (dans ce cas, seul p_0 est non nul, avec la convention $0^0 = 1$). Si $a \neq 0$, la première condition appliquée pour $n = 2$ impose $k > 0$. De plus, pour que la série $\sum_n p_n$ converge, on doit avoir

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a}{a+1}\right| < 1 &\iff \left|\frac{1}{a+1} - 1\right| < 1 \\
&\iff -1 < \frac{1}{a+1} - 1 < 1 \\
&\iff 0 < \frac{1}{a+1} < 2 \\
&\iff a+1 > \frac{1}{2} \\
&\iff a > -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mais alors, comme la série converge, on sait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{k}{1 - \frac{a}{a+1}} = k(a+1)$$

et donc on a $k = \frac{1}{a+1}$. Finalement, puisque $k > 0$ et $p_1 > 0$, on doit donc avoir $\frac{a}{a+1} > 0$ ce qui implique $a > 0$ puisqu'on sait déjà que $a + 1 > 0$.

Réciproquement, si $a = 0$ et $k = 1$, ou $a > 0$ et $k = \frac{1}{a+1}$, on vérifie facilement que les deux propriétés précédents sont vérifiées et donc que (p_n) est une distribution de probabilité. La fonction génératrice est alors donnée par

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n = \frac{k}{1 - \frac{at}{a+1}} = \frac{1}{a+1-at}.$$

Correction de l'exercice 35 ▲

Notons $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} c_n t^n$ les fonctions génératrices respectives de X, Y et Z. On a donc

$$a_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \text{ et } b_n = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}.$$

La série génératrice de Z est obtenue en effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries. On a donc

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

On reconnait bien la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire, Z suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction de l'exercice 36 ▲

1. Soit $t \in [0,1]$. Alors par définition de la fonction génératrice,

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k)t^k.$$

Or, d'après la formule des probabilités totales, la suite d'événements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$ formant un système complet d'événements, on a

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} P(S=k\cap N=n)t^k.$$

Le terme général étant positif, on peut permuter les sommes et on obtient, en utilisant de plus l'indépendance entre la suite (X_n) et N :

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1+\cdots+X_n=k\cap N=n)t^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1+\cdots+X_n=k)t^k\right)P(N=n). \end{aligned}$$

Puisque la fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions génératrices, et puisque les X_n ont la même loi, on trouve

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1+\cdots+X_n=k)t^k = (G_{X_1}(t))^n.$$

On obtient finalement

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)(G_{X_1}(t))^n = G_N(G_{X_1}(t)).$$

2. Si N et X_1 sont d'espérance finie, alors G_N et G_{X_1} sont dérivables en 1. Comme $G_{X_1}(1)=1$, la composée G_S est dérivable en 1 et

$$G_S'(1) = G_{X_1}'(1)G_N'(G_X(1)) = E(X_1)G_N'(1) = E(X_1)E(N).$$

On en déduit que S admet une espérance donnée par

$$E(S) = E(X_1)E(N).$$

Correction de l'exercice 37 ▲

Pour simplifier, notons $p_n = P(X=n)$. La formule avec $n=1$ donne :

$$p_1 = p\sum_{k\geq 1} p_k = p.$$

Pour $n=2$, on a

$$p_2 = p\sum_{k\geq 2} p_k = p\left(\sum_{k\geq 1} p_k - p_1\right) = p(1-p).$$

Montrons ensuite par récurrence sur k que $p_k = p(1-p)^{k-1}$. Le résultat est vérifié si $k=1,2$, supposons le vérifié jusqu'au rang k et prouvons le au rang $k+1$. D'après la contrainte imposée par l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p\sum_{j\geq k+1} p_j = p\left(1-\sum_{j=1}^{k} p(1-p)^{j-1}\right) \\ &= p\left(1-p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}\right) \\ &= p(1-p)^k. \end{aligned}$$

Le résultat est donc prouvé au rang $k+1$ et par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout k. On en déduit que X suit une loi géométrique de paramètre p.

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)P(X>k)-nP(X>n)+P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)-nP(X>n).\end{aligned}$$

On a, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge. Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

2. Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)P(X>k)-nP(X>n)+P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)-nP(X>n).\end{aligned}$$

3. On a, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.

4. Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

5. On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :

$$P(X\leq k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X>k)=1-\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \to_{N \to +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \to 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

6. On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

7. Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

8. On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \to_{N \to +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

9. On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \to 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$
