Chapitre : Exercices sur les espaces probabilisés

1 Tribus

Exercice 1 ★ Tribu engendrée –

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$. On considère $\mathscr{T}$ la tribu engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Quels sont les éléments de la tribu $\mathscr{T}$?

Indication ▼ Correction ▼ [1758]

Exercice 2 ★ Tribu image réciproque –

Soit E et F deux ensembles, $\mathscr{T}$ une tribu sur F et $\phi : E \to F$ une application. Montrer que $\mathscr{T}' = \{\phi^{-1}(A);\ A \in \mathscr{T}\}$ est une tribu sur E.

Indication ▼ Correction ▼ [2014]

Exercice 3 ★★★ Tribu engendrée par une partition –

Soit X un ensemble non-vide et $A_1, \dots, A_n$ une partition de X. On note

$$\mathscr{T} = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i;\ J \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Démontrer que $\mathscr{T}$ est la tribu engendrée par $A_1, \dots, A_n$.

Indication ▼ Correction ▼ [1760]

Exercice 4 ★★ Tribu engendrée par une partition –

Soit E un ensemble infini et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de E. Pour toute partie J de $\mathbb{N}$, on pose $B_J = \bigcup_{j \in J} A_j$.

1. Démontrer que $\mathscr{T} = \{B_J;\ J \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$ est une tribu sur E et que c'est la plus petite tribu contenant tous les A_n.
2. Trouver une partition $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n n'est pas fini.
3. Trouver une tribu incluse dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, de cardinal infini, dont tous les éléments, sauf l'ensemble vide, sont de cardinal infini.

Indication ▼ Correction ▼ [2015]

Exercice 5 ★★ Limites supérieures et inférieures d'ensembles –

Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω. On appelle limite supérieure des A_n, et on note $\limsup_n A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n. On appelle limite inférieure des A_n, et on note $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux.

1. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
$A_n =]-\infty, n]$; $A_n =]-\infty, -n]$; $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$; $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.
2. $A_n =]-\infty, n]$;
3. $A_n =]-\infty, -n]$;
4. $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$;
5. $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.
6. Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de $\bigcap$ et $\bigcup$.

Indication ▼ Correction ▼ [1231]

2 Calculs sur les probabilités

Exercice 6 ★ Sur la probabilité de l'intersection –

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Démontrer que

$$\max\left(0, P(A)+P(B)-1\right) \leq P(A\cap B) \leq \min\left(P(A), P(B)\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1229]

Exercice 7 ★★ Majorer la probabilité d'une réunion –

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \min_{1\leq k\leq n}\left(\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq k}} P(A_i\cap A_k)\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [3479]

Exercice 8 ★★★ Inégalité de Bonferroni –

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1230]

Exercice 9 ★★★★ Somme compliquée –

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{T}$. Calculer

$$P(A_1\cup A_2) + P(\overline{A_1}\cup A_2) + P(A_1\cup\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}).$$

2. Soit $n\geq 2$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{T}$. On pose

$$\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\}\times\cdots\times\{A_n, \overline{A_n}\}.$$

Calculer

$$\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma_n} P(B_1\cup\cdots\cup B_n).$$

Indication ▼ Correction ▼ [3489]

3 Espaces probabilisés infinis dénombrables

Exercice 10 ★ Probabilité sur $\mathbb{N}$ –

Soit $a\in]0,1[$.

1. Démontrer qu'il existe une unique probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(\{n\}) = (1-a)a^n$.
2. On considère les deux événements $A = \{2k :\ k\in\mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1 :\ k\in\mathbb{N}\}$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Indication ▼ Correction ▼ [3487]

Exercice 11 ★ Obtention d'au moins une boule rouge –

On considère une urne qui contient deux boules vertes, une boule rouge, et dans laquelle une effectue une infinité de tirages successifs avec remise. On définit E l'événement : "On obtient au moins une boule rouge". On souhaite calculer $P(E)$ par trois méthodes différentes. Pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

A_n : "on obtient la première boule rouge au n-ème tirage". B_n : "on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages". C_n : "on obtient au moins une boule rouge lors des n premiers tirages".

1. Calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.
2. Exprimer E à l'aide des événements A_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.
3. Exprimer E à l'aide des événements B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.
4. Exprimer E à l'aide des événements C_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.
5. Que peut-on en déduire sur E ?

Indication ▼ Correction ▼ [3485]

Exercice 12 ★ Tirs sur une cible –

Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux fléchettes. Ils tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux touche la cible. Le joueur J_1 joue en premier. Il a une probabilité p_1 de toucher la cible. Le joueur J_2 a une probabilité p_2 de toucher la cible. On pourra remarquer que J_1 joue aux rangs impairs et J_2 joue aux rangs pairs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : "J_1 l'emporte au rang $2n+1$" et B_n l'événement : "J_2 l'emporte au rang $2n+2$". On note aussi, pour $i \in \{1,2\}$, G_i l'événement "J_i l'emporte".

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
3. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3486]

Exercice 13 ★★ Des lancers de dés –

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Indication ▼ Correction ▼ [2017]

Exercice 14 ★★ Premier lemme de Borel-Cantelli –

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements. On note $A = \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$. On suppose que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Pour $n \geq 1$, on note $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$;
2. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$. Interpréter ce résultat.

Indication ▼ Correction ▼ [1233]

Exercice 15 ★★ Double pile ! –

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile (notée P) étant $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir face (notée F) étant $q = 1-p$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : "la première séquence PP apparaît avant la première séquence FP".

2. Pour tout $n \geq 2$, calculer la probabilité de l'événement B_n : "la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n et il n'y a pas eu de séquence FP auparavant". En déduire la probabilité de l'événement B : "la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP".

3. Sur le même modèle, calculer la probabilité de l'événement C : "la première séquence PF apparaît avant la première séquence FF".

Indication ▼ Correction ▼ [3480]

Exercice 16 ★★★ Une suite de jeux –

Des joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2 et, à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur A_{n+1}. Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape n ait lieu ?
2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
3. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

Indication ▼ Correction ▼ [2013]

Exercice 17 ★★★ **Deux piles consécutifs –**

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3. Les lancers sont supposés indépendants. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement "après le n-ème lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs" et p_n la probabilité $P(A_n)$.

1. Déterminer la valeur de p_1, p_2 et p_3.
2. Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 4$, $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout $n \geq 1$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Indication ▼ Correction ▼ [3488]

Exercice 18 ★★★ **La ruine du joueur –**

Soit $N \geq 2$ et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. Un joueur qui dispose d'une somme de k euros, avec $k \in [0,N]$, joue à un jeu de pile ou face avec les règles suivantes. Il lance successivement une pièce de monnaie. A chaque lancer, avec probabilité p, la pièce tombe sur pile et le joueur gagne 1 euro ; et avec probabilité q, la pièce tombe sur face et le joueur perd 1 euro. Le jeu s'arrête lorsque le joueur possède N euros ou lorsqu'il est ruiné. On note p_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné s'il possède la somme de k euros au départ.

1. Déterminer p_0, p_N.
2. Démontrer que pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on a
$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}.$$
3. En déduire la valeur de p_k pour $k \in \{0, \dots, N\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3490]

Exercice 19 ★★★★ **Tirer un nombre au hasard –**

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $1/2^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement "n est un multiple de k".

1. Vérifier que ceci définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité de A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la probabilité de $A_2 \cup A_3$.
4. Montrer que pour $p, q \geq 2$, alors A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Indication ▼ Correction ▼ [2018]

Exercice 20 ★★★★ **Tirage de boule avec remise double –**

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. Etude algorithmique : Dans cette question, on s'intéresse à l'événement suivant : $E =$ "les dix premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boule noire".

Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule la réalisation d'une telle expérience, et affiche 1 si l'événement E a eu lieu, et 0 sinon. import random def experience() : etape=.... succes=... nbboulesblanches=1 while ((succes...) (etape....)) : if (random.random()....) : .... else : ... etape=etape+1 return succes Créer une autre fonction Python qui répète l'expérience N fois et retourne la fréquence de réalisation de l'événement. L'exécution de cet algorithme pour $N = 10000$ a donné une fréquence valant 0,2091. Donner un intervalle contenant $P(E)$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95.

2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule la réalisation d'une telle expérience, et affiche 1 si l'événement E a eu lieu, et 0 sinon. import random def experience() : etape=.... succes=... nbboulesblanches=1 while ((succes...) (etape....)) : if (random.random()....) : .... else : ... etape=etape+1 return succes

3. Créer une autre fonction Python qui répète l'expérience N fois et retourne la fréquence de réalisation de l'événement.

4. L'exécution de cet algorithme pour $N = 10000$ a donné une fréquence valant 0,2091. Donner un intervalle contenant $P(E)$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95.

5. Etude pour un nombre fini de tirages. Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement : "Les n premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noires". On note $u_n = P(B_n)$.

Démontrer, sans chercher à calculer u_n, que la suite (u_n) est convergente. Démontrer que $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

6. Démontrer, sans chercher à calculer u_n, que la suite (u_n) est convergente.

7. Démontrer que $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

8. Etude à l'infini. On note B_∞ l'événement : "l'expérience ne s'arrête jamais".

Démontrer que $P(B_\infty) = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Vérifier que $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$. Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} \ln(1+2^{-k})$ est convergente. En déduire que $P(B_\infty) > 0$.

9. Démontrer que $P(B_\infty) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

10. Vérifier que $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$.

11. Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} \ln(1+2^{-k})$ est convergente.

12. En déduire que $P(B_\infty) > 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [2209]

4 Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 21 ★★ Probabilité d'une réunion et indépendance –

Soient $A_1,\dots,A_n$ n événements d'un espace probabilisé (Ω,P). On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = P(A_i)$. Donner une expression simple de $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ en fonction de $p_1,\dots,p_n$. Application : on suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité p d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ?

Indication ▼ Correction ▼ [1238]

Exercice 22 ★★★ Relecture –

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité 1/3. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?

2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Indication ▼ Correction ▼ [1239]

Exercice 23 ★★★ Jeu équitable ? –

Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in]0,1[$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in]0,1[$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
3. A quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Indication ▼ Correction ▼ [3142]

Exercice 24 ★★★ Indépendance et réunion –

Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Montrer que $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})$.
2. Soit (u_k) une suite de réels de $]0,1[$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes : (a) $\prod_{k=0}^{n} u_k \to 0$ quand $n \to +\infty$ (b) $\sum \ln(u_k)$ diverge (c) $\sum(1-u_k)$ diverge.
3. (a) $\prod_{k=0}^{n} u_k \to 0$ quand $n \to +\infty$
4. (b) $\sum \ln(u_k)$ diverge
5. (c) $\sum(1-u_k)$ diverge.
6. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) \neq 1$. Démontrer que $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$ si et seulement si la série de terme général $P(A_n)$ diverge.
7. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) = \dfrac{1}{(n+2)^2}$. Calculer $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Indication ▼ Correction ▼ [3482]

Exercice 25 ★★★ Indépendance d'événements et cardinal de l'univers –

Soit (Ω, P) un univers fini. On suppose qu'il existe n événements $A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants et pour lesquels $P(A_k) \in]0,1[$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

1. Soit $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec pour tout $k = 1, \dots, n$, $B_k = A_k$ ou $B_k = \overline{A_k}$. Démontrer que $B_1 \cap \cdots \cap B_n \neq \varnothing$.
2. Soit $B_1, \dots, B_n, B'_1, \dots, B'_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec pour tout $k = 1, \dots, n$, $B_k, B'_k \in \{A_k, \overline{A_k}\}$. On suppose que $(B_1, \dots, B_n) \neq (B'_1, \dots, B'_n)$. Démontrer que $B_1 \cap \cdots B_n$ et $B'_1 \cap \cdots \cap B'_n$ sont disjoints.
3. En déduire que $\mathrm{card}(\Omega) \geq 2^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [3139]

Exercice 26 ★★★★ Indicatrice d'Euler –

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.
2. Pour tout entier naturel m qui divise n, calculer la probabilité de A_m.
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la probabilité de B.
5. Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1240]

Exercice 27 ★★★ Probabilité conditionnelle égale à probabilité –

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$.

Indication ▼ Correction ▼ [2021]

Exercice 28 ★★★ **La rumeur –**

Une information de type vrai/faux est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Indication ▼ Correction ▼ [1249]

Exercice 29 ★★★ **Marche aléatoire sur un triangle –**

1. Question préliminaire : Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que M est diagonalisable, et trouver P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

2. On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé suivant :

si la particule se trouve en B, elle y reste ; si la particule se trouve en A, elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable ; si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.

A la première seconde, la particule se pose de façon équiprobable sur un des trois sommets. Pour tout $n \geq 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "à la n-ième seconde, la particule se trouve en A" (resp. B et C), et on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n. Que valent a_1, b_1 et c_1 ?

3. si la particule se trouve en B, elle y reste ;
4. si la particule se trouve en A, elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable ;
5. si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
6. Donner une relation de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n et c_n.
7. On note, pour $n \geq 1$, X_n le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1} = MX_n$.
8. En déduire la valeur de a_n, b_n et c_n.
9. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Indication ▼ Correction ▼ [2020]

Exercice 30 ★★ **Compagnie d'assurance –**

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Indication ▼ Correction ▼ [1248]

Exercice 31 ★★ **La forêt** –

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30

Indication ▼ Correction ▼ [2019]

Exercice 32 ★★★ **Tests de dépistage** –

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Indication ▼ Correction ▼ [1251]

Exercice 33 ★★★ **Menteur !** –

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?

Indication ▼ Correction ▼ [1252]

Exercice 34 ★★★ **Machines à sous** –

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machines $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ qui sont réglées de la facon suivante :

la probabilité de gagner sur la machine $\mathscr{A}$ est de $\frac{1}{5}$; la probabilité de gagner sur la machine $\mathscr{B}$ est de $\frac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

il commence par choisir une machine au hasard ; après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout $k \geq 1$ les événements suivants :

G_k : "Le joueur gagne la k-ième partie". A_k : "La k-ième partie se déroule sur la machine $\mathscr{A}$".

1. Écrire une fonction Python `jouer(n)` qui simule le déroulement de n parties et retourne la proportion de parties gagnées parmi ces n parties.
2. Determiner la probabilité de gagner la première partie.
3. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine $\mathscr{A}$?
5. Soit $k \geq 1$.

Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$. Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$. En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(G_k)$. Calculer S_n puis déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

6. Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$.
7. Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$.
8. En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k.
9. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(G_k)$. Calculer S_n puis déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [2208]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Démontrer que tous les singletons $\{n\}$ sont éléments de la tribu.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Utiliser les propriétés de l'image réciproque d'une fonction....

Indication pour l'exercice 3 ▲

Démontrer d'abord que $\mathscr{T}$ est une tribu.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Vérifier la définition.
2. Utiliser une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.
3.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Indication pour l'exercice 6 ▲

Il y a en réalité quatre inégalités à prouver. Une seule n'est pas immédiate. Partir de

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Indication pour l'exercice 7 ▲

Utiliser

$$P(A_i)-P(A_i\cap A_k) = P(A_i\backslash A_k).$$

Indication pour l'exercice 8 ▲

Procéder par récurrence sur n.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Utiliser $P(A\cup B)=\dots$ et le fait que $\{A_1,\overline{A_1}\}$ est un système complet d'événements.
2. Procéder par récurrence, et commencer par simplifier, pour $B_1,\dots,B_n$ fixés,

$$P(B_1\cup\dots\cup B_{n-1}\cup A_n)+P(B_1\cup\dots\cup B_{n-1}\cup\overline{A_n}).$$

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Il y a deux conditions à vérifier.
2.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. $B_n=\overline{C_n}$.
2. Les événements A_n sont deux à deux incompatibles.
3. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion.
4. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion.

5.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1.
2.
3. Résoudre $P(G_1) = P(G_2)$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Considérer A_n l'événement défini par "les $n-1$ premiers lancers donnent 2 ou 4 et le n-ième lancer donne 6".

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Utiliser la sous additivité dénombrable.
2. Continuité monotone décroissante (démontrer d'abord que la suite (D_n) est décroissante).

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Quel est le résultat des deux premiers lancers pour que A soit réalisé ?
2. Quel est le résultat des $n-2$ premiers lancers pour que B_n soit réalisé ?
3. Distinguer les cas suivant que le premier lancer est F ou P.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1.
2. Déduire de la question précédente la probabilité que le jeu s'arrête à l'étape n.
3.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Introduire P_k (resp. F_k) l'événement "on obtient pile" (resp. face) au $k-$ième lancer.
2. Utiliser le fait que les événements P_1 et F_1 forment un système complet d'événements, et
3. Revoir les suites récurrentes d'ordre 2.
4.

Indication pour l'exercice 18 ▲

1.
2. On note P_1 l'événement : "le premier lancer donne pile". Utiliser le système complet d'événements $\{P_1, \overline{P_1}\}$.
3. C'est une suite récurrence d'ordre 2. Attention, le cas $p = q = 1/2$ est à considérer à part.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Il suffit de vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} P(\{n\})$ est convergente et que sa somme vaut 1.
2. Les multiples de k...
3. Calculer d'abord $P(A_2 \cap A_3)$.
4. Introduire le ppcm de p et q.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Indication pour l'exercice 21 ▲

Passer par le complémentaire.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Introduire A_i l'événement "l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée par le i-ème relecteur" et interpréter la question en termes de A_i.

2. Introduire B_j l'événement "l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture" et interpréter la question en termes de B_j.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Un seul déroulement correspond au match nul.
2. Écrire l'événement "A gagne" comme réunion d'événements.
3.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Passer par la probabilité du complémentaire et utiliser la continuité décroissante.

2. Passer par le logarithme, et utiliser les résultats classiques sur les séries dont le terme général est de signe constant. On pourra utiliser $\ln(u_k) = \ln(1-(1-u_k))$.

3. C'est une conséquence des deux résultats précédents.

4. Calculer le produit. Des simplifications doivent apparaître.

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Calculer la probabilité de l'intersection.
2. Si $B_k \neq B'_k$, que dire que $B_k \cap B'_k$?
3.

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x.
2. Écrire quels sont tels les élements de A_m.
3. Utiliser un résultat d'arithmétique.
4.
5.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Que vaut $\mathbb{P}_A(A)$?

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Utiliser la formule des probabilités totales.
2. On a une suite arithmético-géométrique. Retirer la limite possible pour retrouver une suite géométrique.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Calculer le polynôme caractéristique....
2.
3. Utiliser la formule des probabilités totales.
4.
5. Utiliser la diagonalisation de M.
6.

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. Appliquer la formule des probabilités totales.

2. Appliquer la formule de Bayes.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Utiliser la formule de Bayes.

Indication pour l'exercice 32 ▲

Calculer la probabilité qu'une personne est malade si elle a une réponse positive au test.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Introduire la proportion x de tricheurs dans la population, et donner, à l'aide du théorème de Bayes, une estimation de la probabilité qu'il soit un tricheur en fonction de x. Il faudra convenir de certaines probabilités de bon sens.

Indication pour l'exercice 34 ▲

1.

2. Appliquer la formule des probabilités totales.

3. Faire un arbre.

4. Appliquer la formule de Bayes.

5. Appliquer la formule des probabilités totales. Il y a deux éventualités pour jouer sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie suivant ce qui se passe à la k-ième. Reconnaitre une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$. On résout $\ell = a\ell + b$ puis on étudie $v_n = u_n - \ell$. Somme d'une suite géométrique.

6. Appliquer la formule des probabilités totales.

7. Il y a deux éventualités pour jouer sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie suivant ce qui se passe à la k-ième.

8. Reconnaitre une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$. On résout $\ell = a\ell + b$ puis on étudie $v_n = u_n - \ell$.

9. Somme d'une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1 ▲

Il est facile de voir que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\{n\} = S_{n-2} \cap S_n.$$

Puisque toute partie de $\mathbb{Z}$ est réunion dénombrable de singletons, et qu'une tribu est stable par passage à la réunion dénombrable, on en déduit finalement que $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Remarquons d'abord que $E = \phi^{-1}(F)$ est un élément de $\mathscr{T}'$. De plus, si $B \in \mathscr{T}'$, $B = \phi^{-1}(A)$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $B^c = \phi^{-1}(A)^c = \phi^{-1}(A^c)$ est aussi un élément de $\mathscr{T}'$. Enfin, si (B_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{T}'$, chaque B_n s'écrivant $B_n = \phi^{-1}(A_n)$, alors

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n \phi^{-1}(A_n) = \phi^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) \in \mathscr{T}'.$$

Ainsi, on a prouvé que $\mathscr{T}'$ est bien une tribu.

Correction de l'exercice 3 ▲

On commence par remarquer que $\mathscr{T}$ est une tribu. En effet,
$X = \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} A_i$; Si $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ est un élément de $\mathscr{T}$, alors

$$A^c = \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus J} A_i$$

car $A_1, \dots, A_n$ forme une partition de X et donc $A^c \in \mathscr{T}$. $\bigcup_p \bigcup_{i \in J_p} A_i = \bigcup_{i \in \bigcup_p J_p} A_i$, et donc $\mathscr{T}$ est stable par réunion dénombrable.

De plus, $\mathscr{T}$ contient tous les A_i, et donc elle contient la tribu engendrée par $A_1, \dots, A_n$. Maintenant, toute tribu contenant $A_1, \dots, A_n$ doit nécessairement contenir n'importe quelle réunion finie des A_i. $\mathscr{T}$ est donc bien la tribu engendrée par $A_1, \dots, A_n$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Il suffit de vérifier la définition. $E = B_{\mathbb{N}}$ est élément de $\mathscr{T}$. Si $B = B_J$ est élément de $\mathscr{T}$, alors $B^c = B_{J^c}$ est aussi élément de $\mathscr{T}$. Enfin, si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{T}$, avec $B_n = B_{J_n}$, alors $\bigcup_n B_n = B_{\bigcup_n J_n}$. On a donc prouvé que $\mathscr{T}$ est une tribu sur E. Elle contient tous les A_n, car $B_{\{n\}} = A_n$. C'est la plus petite tribu qui contient tous les A_n, car si J est une partie de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, et si $\mathscr{T}'$ est une tribu contenant tous les A_n, alors par stabilité par réunion finie ou dénombrable, $\mathscr{T}'$ contient $\bigcup_{j \in J} A_j = B_J$.

2. Il y a de nombreuses façons de répondre à cette question. On peut exhiber une telle partition, par exemple en choisissant pour A_0 la réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des nombres impairs, A_1 l'ensemble des nombres divisibles par 2, mais pas par 4, et plus généralement, A_n l'ensemble des entiers divisibles par 2^n, mais pas par 2^{n+1}. On peut aussi considérer ϕ une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$, et poser $A_n = \phi(\mathbb{N} \times \{n\})$.

3. Il suffit de considérer la tribu définie à la première question associée à la partition de $\mathbb{N}$ trouvée à la deuxième question.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Dans ce cas, $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \mathbb{R}$, car n'importe quel réel appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \varnothing$, car n'importe quel réel n'appartient qu'à un nombre fini de A_n. Si $x \in \limsup_n A_n$, ceci signifie qu'il est membre d'une infinité d'éléments de la suite (A_n). Comme cette suite ne comporte que les ensembles A et B, on a $\limsup_n A_n \subset A \cup B$. Réciproquement, si on est dans A, on est dans tous les A_{2n}, et donc on est dans $\limsup_n A_n$. De même si on est dans B. Ainsi, $\limsup_n A_n = A \cup B$. De même, si $x \in \liminf_n A_n$, ceci signifie que x appartient à tous les ensembles A_n à partir d'un certain rang. Comme ceux-ci sont alternativement A et B, on a $x \in A \cap B$. Réciproquement, si $x \in A \cap B$, il est dans tous les

ensembles A_n, ce qui achève la preuve de $\liminf_n A_n = A \cap B$. D'après la question précédente, avec $A =]-\infty, 1]$ et $B =]-\infty, -1]$,

$$\liminf_n A_n =]-\infty, -1] \text{ et } \limsup_n A_n =]-\infty, 1].$$

2. Dans ce cas, $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \mathbb{R}$, car n'importe quel réel appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang.

3. Dans ce cas, $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \varnothing$, car n'importe quel réel n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.

4. Si $x \in \limsup_n A_n$, ceci signifie qu'il est membre d'une infinité d'éléments de la suite (A_n). Comme cette suite ne comporte que les ensembles A et B, on a $\limsup_n A_n \subset A \cup B$. Réciproquement, si on est dans A, on est dans tous les A_{2n}, et donc on est dans $\limsup_n A_n$. De même si on est dans B. Ainsi, $\limsup_n A_n = A \cup B$. De même, si $x \in \liminf_n A_n$, ceci signifie que x appartient à tous les ensembles A_n à partir d'un certain rang. Comme ceux-ci sont alternativement A et B, on a $x \in A \cap B$. Réciproquement, si $x \in A \cap B$, il est dans tous les ensembles A_n, ce qui achève la preuve de $\liminf_n A_n = A \cap B$.

5. D'après la question précédente, avec $A =]-\infty, 1]$ et $B =]-\infty, -1]$,

$$\liminf_n A_n =]-\infty, -1] \text{ et } \limsup_n A_n =]-\infty, 1].$$

6. On a

$$\liminf_n A_n = \{x \in \Omega;\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ x \in A_n\} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} A_n$$

$$\limsup_n A_n = \{x \in \Omega;\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geq p,\ x \in A_n\} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Remarquons d'abord que $A \cap B \subset A$ et donc $P(A \cap B) \leq P(A)$. De même, $P(A \cap B) \leq P(B)$, ce qui prouve l'inégalité de droite. De plus, $P(A \cap B) \geq 0$ et aussi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Mais $P(A \cup B) \leq 1$ et donc

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

On a donc aussi obtenu l'inégalité de gauche.

Correction de l'exercice 7 ▲

Il s'agit de prouver que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} P(A_i \cap A_k).$$

Par symétrie, on peut supposer que $k = n$. Pour $i = 1, \dots, n-1$, on a

$$P(A_i) - P(A_i \cap A_n) = P(A_i \backslash A_n)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) &= P(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \big(P(A_i) - P(A_i \cap A_n)\big) \\
&= P(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \backslash A_n) \\
&\geq P\left(A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \backslash A_n)\right).
\end{aligned}$$

Or,
$$A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \backslash A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
et donc
$$P\left(A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \backslash A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
ce qui donne le résultat voulu.

Correction de l'exercice 8 ▲

On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$
La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$
Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, et on obtient
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$
ce qui est exactement le résultat voulu.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. On commence par remarquer que
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1}) + P(A_2) - P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= 1 + 2P(A_2) - \big(P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2)\big). \end{aligned}$$
Utilisant que $\{A_1, \overline{A_1}\}$ est un système complet d'événements, on trouve
$$P(A_1 \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup A_2) = 1 + 2P(A_2) - P(A_2) = 1 + P(A_2).$$
De la même façon,
$$P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = 1 + P(\overline{A_2})$$
et finalement
$$P(A_1 \cup A_2) + P(\overline{A_1} \cup A_2) + P(A_1 \cup \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = 3.$$

2. Démontrons par récurrence sur $n \geq 2$ que, pour tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{T}$, posant
$$\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\},$$
on a
$$\sum_{(B_1, \ldots, B_n) \in \Gamma_n} P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 2^n - 1.$$
La propriété est vraie pour $n = 2$. Supposons la vraie au rang $n-1$ pour $n \geq 2$ et prouvons la au rang n. Le raisonnement de la question précédente prouve que, pour tout $E \in \mathscr{T}$, on a
$$P(E \cup A_n) + P(E \cup \overline{A_n}) = 1 + P(E).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma_n} P(B_1\cup\dots\cup B_n) &= \sum_{(B_1,\dots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}} \big(P(B_1\cup\dots\cup B_{n-1}\cup A_n)+P(B_1\cup\dots\cup B_{n-1}\cup\overline{A_n})\big)\\ &= \sum_{(B_1,\dots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}} \big(P(B_1\cup\dots\cup B_{n-1})+1\big)\\ &= 2^{n-1}-1+2^{n-1}=2^n-1\end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence et $\mathrm{card}(\Gamma_{n-1})=2^{n-1}$. Ainsi, la propriété est vraie au rang n et le résultat est prouvé.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Il suffit de vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a^n(1-a)\in]0,1[$ - ce qui est clair puisque $a\in]0,1[$, donc $a^n\in]0,1]$ (n peut être égal à 0) et $1-a\in]0,1[$ - et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-a)a^n=\frac{1-a}{1-a}=1.$$

2. On a

$$P(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-a)a^{2k}=\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{1}{1+a}.$$

Comme $B=\bar{A}$, on a

$$P(B)=1-P(A)=\frac{a}{1+a}.$$

Puisque $A\cap B=\varnothing$, les événements A et B sont incompatibles. Puisque $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$ et $P(A)P(B)\neq 0$, les événements A et B ne sont pas indépendants.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Notons, pour $k\in\mathbb{N}^*$, V_k l'événement "on obtient une boule verte au k-ème tirage", et R_k son complémentaire. L'événement A_n est égal à $V_1\cap\dots\cap V_{n-1}\cap R_n$. Par indépendance de ces événements (le tirage étant effectué avec remise), on a

$$P(A_n)=P(V_1)\times\dots\times P(V_{n-1})\times P(R_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}.$$

L'événement B_n est égal à $V_1\cap\dots\cap V_n$, et donc on a

$$P(B_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Enfin, $C_n=\overline{B_n}$ et donc

$$P(C_n)=1-P(B_n)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

2. L'événement E s'écrit $E=\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$. De plus, les événements A_n sont deux à deux incompatibles. On a donc

$$P(E)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

3. On a $\overline{E}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $B_{n+1}\subset B_n$. Par continuité décroissante, on en déduit

$$P(\overline{E})=\lim_{n\to+\infty}P(B_n)=0$$

et donc $P(E)=1$.

4. On a $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $C_n \subset C_{n+1}$. Par continuité croissante, on obtient

$$P(E) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.$$

5. L'événement E est un événement presque sûr : on est presque sûr d'obtenir, au moins une fois, une boule rouge.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. L'événement A_n correspond au déroulement suivant : J_1 rate la cible lors de ses n premiers tirs, J_2 rate la cible lors de ses n premiers tirs et J_1 touche la cible lors de son $n+1$-ème lancer. On a donc, les lancers étant indépendants,

$$P(A_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1.$$

De la même façon,

$$P(B_n) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2.$$

2. L'événement G_1 s'écrit $G_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Les événements A_n étant deux à deux incompatibles, on a

$$P(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

De la même façon,

$$P(G_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

Notons I l'événement "le jeu dure indéfiniment". Les événements G_1, G_2 et I forment un système complet d'événements et donc

$$P(G_1)+P(G_2)+P(I) = 1.$$

Or,

$$P(G_1)+P(G_2) = \frac{p_1+p_2(1-p_1)}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1.$$

Ainsi, $P(I) = 0$. Le jeu s'arrête presque sûrement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si $P(G_1) = P(G_2)$ c'est-à-dire si et seulement si

$$p_1 = p_2(1-p_1) \iff p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$$

(bien sûr, si $p_1 = 1$, le jeu n'est pas équitable puisque $P(G_1) = 1$).

Correction de l'exercice 13 ▲

On considère A_n l'événement défini par "les $n-1$ premiers lancers donnent 2 ou 4 et le n-ième lancer donne 6". L'événement étudié est $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Ces événements étant disjoints, on a $P(A) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$. Par indépendance des lancers, on a

$$P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}.$$

On en déduit que

$$P(A) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Par la sous-additivité d'une probabilité,

$$0 \leq P(D_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

La dernière somme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car c'est le reste d'une série convergente. Par le théorème d'encadrement, $(P(D_n))$ tend vers 0.

2. On écrit que $A = \bigcap_n D_n$. On va démontrer que la suite (D_n) est décroissante. En effet,

$$D_n = D_{n+1} \cup A_n.$$

On peut donc utiliser la continuité monotone décroissante de P pour en déduire

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(D_n) = 0.$$

Presque sûrement, seul un nombre fini des événements A_n peuvent se produire simultanément.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Si cet événement est réalisé, alors la suite de lancers doit commencer par PP, sinon au moment où on obtient pour la première fois cette séquence PP, le lancer précédent est un F et on obtient la séquence FP avant la séquence PP. Ainsi, on a

$$P(A) = p^2.$$

2. Si B_n est réalisé, alors les $n-2$ premiers lancers donnent nécessairement P car s'il y avait un F dans ces $n-2$ premiers lancers, on obtiendrait la séquence FP avant la séquence PF. Puisque le $n-1$-ème lancer donne P et le n-ème lancer donne F, on trouve

$$P(B_n) = p^{n-1}q.$$

Puisque B est la réunion des événements incompatibles B_n, pour $n \geq 2$, on a

$$P(B) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1}q = \frac{pq}{1-p} = p.$$

3. Comme précédemment, on va noter, pour $n \geq 2$, C_n l'événement : "la première séquence PF apparaît aux lancers $n-1$ et n et auparavant il n'y a pas eu de séquence FF". On commence par remarquer que $P(C_2) = pq$ (le premier tirage amène P et le deuxième tirage amène F). Supposons maintenant que $n \geq 3$, et distinguons deux cas :

soit la suite de lancers commence par F. Alors les lancers 2 à $n-1$ sont des P, et le lancer n est un F. soit la suite de lancers commence par P. Alors les lancers 2 à $n-1$ doivent également être des P et le lancer n est un F.

Finalement, pour $n \geq 3$, on a

$$P(C_n) = qp^{n-2}q + p^{n-1}q = (p+q)p^{n-2}q = p^{n-2}q.$$

On conclut que

$$P(C) = pq + \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-2}q = pq + \frac{pq}{1-p} = pq + p.$$

4. soit la suite de lancers commence par F. Alors les lancers 2 à $n-1$ sont des P, et le lancer n est un F.

5. soit la suite de lancers commence par P. Alors les lancers 2 à $n-1$ doivent également être des P et le lancer n est un F.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Notons E_n l'événement "la n-ième étape a lieu". On a $P(E_1) = 1$ et $P(E_2) = 1$. Ensuite, pour $n \geq 3$, si la $n-1$-ième étape a eu lieu, il y a une probabilité 1/2 que l'on s'arrête là (le joueur qui avait remporté la manche précédente remporte une deuxième manche consécutive) et une probabilité $1/2$ que l'on continue. Ainsi, $P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1})$ d'où l'on déduit que, pour tout $n \geq 2$, on a $P(E_n) = \frac{1}{2^{n-2}}$.

2. Notons F_n l'événement : "Le jeu s'arrête à l'étape n". On a

$$P(F_n) = P(E_n) - P(E_{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

si $n \geq 2$, et $P(F_1) = 0$. Les événements F_n étant incompatibles, on en déduit que

$$P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(F_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1.$$

Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement (avec une probabilité 1).

3. Remarquons d'abord que la probabilité que A_1 ou que A_2 gagne vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (il faut que A_1et A_2 gagnent les deux premières parties). Pour $n \geq 3$, A_n joue si et seulement si l'étape $n-1$ a lieu, et donc A_n joue avec une probabilité valant $\frac{1}{2^{n-3}}$. Et lorsque A_n joue, il a une probabilité 1/4 de gagner. En conclusion,

$$P(A_n \text{ gagne}) = \frac{1}{4} P(A_n \text{ joue}) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au $k-$ième lancer. L'événement A_1 est impossible et $p_1 = 0$. L'événement A_2 est égal à $P_1 \cap P_2$ ce qui par indépendance donne

$$p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

De même,

$$A_3 = F_1 \cap P_2 \cap P_3 \implies p_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Pour p_4, cela se corse un peu !

$$A_4 = F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4 \implies p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 :

si on a obtenu pile au 1er lancer et que A_n est réalisé, on a forcément obtenu face au second lancer, donc avec une probabilité de 1/3. Puis il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$-ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}. On a donc

$$P(A_n|P_1) = \frac{1}{3} p_{n-2} \text{ et } P(P_1) = \frac{2}{3}.$$

ou bien avoir obtenu face au 1er lancer. Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}. On a donc

$$P(A_n|F_1) = p_{n-1} \text{ et } P(F_1) = \frac{1}{3}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}.$$

3. si on a obtenu pile au 1er lancer et que A_n est réalisé, on a forcément obtenu face au second lancer, donc avec une probabilité de 1/3. Puis il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$-ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}. On a donc

$$P(A_n|P_1) = \frac{1}{3} p_{n-2} \text{ et } P(P_1) = \frac{2}{3}.$$

4. ou bien avoir obtenu face au 1er lancer. Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}. On a donc

$$P(A_n|F_1) = p_{n-1} \text{ et } P(F_1) = \frac{1}{3}.$$

5. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2 = r/3 + 2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement que, pour $n \geq 2$, on a

$$p_n = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes (p_1 et p_2). On obtient :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

6. En utilisant la formule donnant la somme d'une série géométrique, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} \times \frac{\frac{-1}{3}}{1-\frac{-1}{3}} \\ &= \frac{4}{9} \times 3 - \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Notons E l'événement "On obtient au moins deux piles consécutifs". L'événement E s'écrit $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et les événements A_n étant deux à deux incompatibles, on trouve

$$P(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

Presque sûrement, on obtient deux piles consécutifs.

Correction de l'exercice 18 ▲

---

1. On a $p_0 = 1$ et $p_N = 0$.

2. On note P_1 l'événement : "le premier lancer donne pile" et E l'événement : "le joueur est ruiné". Puisque $\{P_1, \overline{P_1}\}$ est un système complet d'événements, on a

$$P(E) = P(E|P_1)P(P_1) + P(E|\overline{P_1})P(\overline{P_1}) = pP(E|P_1) + qP(E|\overline{P_1}).$$

Si P_1 est réalisé, le joueur dispose après le premier lancer d'une somme de $k+1$ euros. La probabilité qu'il soit ruiné est donc égale à la probabilité qu'un joueur disposant d'une somme initiale de $k+1$ euros soit ruiné. De même, si $\overline{P_1}$ est réalisé, le joueur dispose après le premier lancer d'une somme de $k-1$ euros, la probabilité qu'il soit ruiné est donc égale à la probabilité qu'un joueur disposant d'une somme initiale de $k+1$ euros soit ruiné. On a donc

$$P(E) = pp_{k+1} + qp_{k-1}.$$

3. Si on réécrit cette relation sous la forme

$$p_{k+1} = \frac{1}{p} p_k - \frac{q}{p} p_{k-1},$$

on reconnaît une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est

$$r^2 - \frac{1}{p} r + \frac{q}{p} = 0.$$

Si $p \neq 1/2$ et donc $p \neq q$, cette équation admet deux racines distinctes qui sont 1 et $\frac{q}{p}$ et donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, on a

$$p_k = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Utilisant les valeurs de p_0 et p_N, on a le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta &=& 1 \\ \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^N &=& 0. \end{array}\right.$$

Finalement, après résoluton du système, on trouve

$$p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Lorsque $p=q=1/2$, l'équation caractéristique admet 1 pour racine double, et il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $k\in\{0,\dots,N\}$, on a

$$p_k=\alpha+\beta k.$$

En utilisant la même technique de résolution, on trouve finalement

$$u_k = 1-\frac{k}{N}.$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Il suffit de vérifier que la série $\sum_{n\geq 1}P(\{n\})$ est convergente et que sa somme vaut 1. Mais puisque $P(\{n\})=1/2^n$, on a une somme géométrique de raison 1/2 dont la somme vaut effectivement 1.

2. Les éléments de A_k sont les mk, avec $m\geq 1$. On a donc

$$P(A_k)=\sum_{m\geq 1}\frac{1}{2^{mk}} = \frac{1}{2^k}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^k-1}.$$

3. On va utiliser le fait que $P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)$. Un entier est dans $A_2\cap A_3$ si et seulement s'il est divisible par 2 et par 3 si et seulement s'il est divisible par 6, si et seulement s'il appartient à A_6. On a donc

$$P(A_2\cup A_3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{63}=\frac{29}{63}.$$

4. Notons $m\geq 2$ le ppcm de p et q. Alors $A_p\cap A_q=A_m$. Si A_p et A_q étaient indépendants, on aurait $P(A_m)=P(A_p)\times P(A_q)$ et donc

$$2^m=(2^p-1)(2^q-1)+1=2^{p+q}-2^p-2^q+2.$$

Or, le membre de gauche est divisible par 4, et pas le membre de droite (tous les termes à droite sont divisibles par 4, sauf 2...). On a donc une contradiction.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Voici une possibilité : import random def experience() : etape=1 succes=1 nbboulesblanches=1 while ((succes==1) (etape<=10)) : if (random.random()<1/(1+nbboulesblanches)) : succes=0 else : nbboulesblanches=2*nbboulesblanches etape=etape+1 return succes

La variable etape retient le numéro du tirage effectué. La variable succes vaut 0 tant qu'on n'a pas tiré une boule noire. On appelle N fois la fonction experience par une boucle for, et on comptabilise le nombre de succès. def repet(N) : total=0 for i in range(N) : total=total+experience() return total/N Notons p la probabilité de E et f la fréquence trouvée. On a répété N fois de façon indépendante une même expérience aléatoire avec probabilité p de succès. On a trouvé une fréquence f de réalisation. Un intervalle de confiance au seuil de 5

$$\left[f-1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{N}},f+1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{N}}\right]\simeq[0,2011;0.2171].$$

2. Voici une possibilité : import random def experience() : etape=1 succes=1 nbboulesblanches=1 while ((succes==1) (etape<=10)) : if (random.random()<1/(1+nbboulesblanches)) : succes=0 else : nbboulesblanches=2*nbboulesblanches etape=etape+1 return succes

La variable etape retient le numéro du tirage effectué. La variable succes vaut 0 tant qu'on n'a pas tiré une boule noire.

3. On appelle N fois la fonction experience par une boucle for, et on comptabilise le nombre de succès. def repet(N) : total=0 for i in range(N) : total=total+experience() return total/N

4. Notons p la probabilité de E et f la fréquence trouvée. On a répété N fois de façon indépendante une même expérience aléatoire avec probabilité p de succès. On a trouvé une fréquence f de réalisation. Un intervalle de confiance au seuil de 5

$$\left[f-1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{N}}, f+1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{N}}\right] \simeq [0,2011;0.2171].$$

5. On a $B_{n+1} \subset B_n$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente. Fixons $k \geq 1$ et calculons la probabilité $P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})$. Au k-ième tirage, on a 1 boule noire et 2^{k-1} boules blanches (puisqu'on multiplie par deux le nombre de boules blanches à chaque étape). La probabilité de piocher une boule blanche est donc de $2^{k-1}/(1+2^{k-1})$. On a donc

$$P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}) = \frac{2^{k-1}}{1+2^{k-1}}.$$

Maintenant, par la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|B_{n-1} \cap B_{n-2} \cap \cdots \cap B_1)P(B_{n-1}|B_{n-2} \cap \cdots \cap B_1) \cdots P(B_2|B_1)P(B_1) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}. \end{aligned}$$

6. On a $B_{n+1} \subset B_n$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente.

7. Fixons $k \geq 1$ et calculons la probabilité $P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})$. Au k-ième tirage, on a 1 boule noire et 2^{k-1} boules blanches (puisqu'on multiplie par deux le nombre de boules blanches à chaque étape). La probabilité de piocher une boule blanche est donc de $2^{k-1}/(1+2^{k-1})$. On a donc

$$P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}) = \frac{2^{k-1}}{1+2^{k-1}}.$$

Maintenant, par la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|B_{n-1} \cap B_{n-2} \cap \cdots \cap B_1)P(B_{n-1}|B_{n-2} \cap \cdots \cap B_1) \cdots P(B_2|B_1)P(B_1) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}. \end{aligned}$$

8. On a $B_\infty = \bigcap_n B_n$. De plus, la suite d'événements (B_n) est décroissante pour l'inclusion. On en déduit que $P(B_\infty) = \lim_n P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Par les propriétés fonctionnelles du logarithme,

$$\begin{aligned} -\ln(u_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} -\ln\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1+2^k}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+2^{-k}\right). \end{aligned}$$

La sulte $\ln(1+2^{-k})$ est toujours positive. On a aussi que

$$\ln(1+2^{-k}) \sim_{+\infty} 2^{-k}.$$

De plus, la série $\sum_k 2^{-k}$ est convergente. Donc par comparaison la série $\sum_k \ln(1+2^{-k})$ est convergente. D'après la question précédente, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(u_n)$ tend vers λ. Par continuité de la fonction exponentielle, $u_n \to e^\lambda > 0$. Et $P(B_\infty) = \lim_n u_n = e^\lambda$.

9. On a $B_\infty = \bigcap_n B_n$. De plus, la suite d'événements (B_n) est décroissante pour l'inclusion. On en déduit que $P(B_\infty) = \lim_n P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

10. Par les propriétés fonctionnelles du logarithme,

$$\begin{aligned} -\ln(u_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} -\ln\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1+2^k}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+2^{-k}\right). \end{aligned}$$

11. La sulte $\ln(1+2^{-k})$ est toujours positive. On a aussi que

$$\ln(1+2^{-k}) \sim_{+\infty} 2^{-k}.$$

De plus, la série $\sum_k 2^{-k}$ est convergente. Donc par comparaison la série $\sum_k \ln(1+2^{-k})$ est convergente.

12. D'après la question précédente, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(u_n)$ tend vers λ. Par continuité de la fonction exponentielle, $u_n \to e^\lambda > 0$. Et $P(B_\infty) = \lim_n u_n = e^\lambda$.

Correction de l'exercice 21 ▲

Si les événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, les événements complémentaires $\overline{A_1},\dots,\overline{A_n}$ le sont aussi. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(A_1\cup\dots\cup A_n) &= 1-P(\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_n}) \\ &= 1-\prod_{i=1}^n P(\overline{A_i}) \\ &= 1-\prod_{i=1}^n (1-p_i). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier proposé, la probabilité d'avoir au moins un accident vaut donc $1-(1-p)^n$.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Notons A_i l'événement "l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée par le i-ème relecteur". Alors on a $P(A_i) = 2/3$ et les événements A_i sont indépendants. On s'intéresse à la probabilité de l'événement $A_1\cap\dots\cap A_n$ qui vaut donc

$$P(A_1\cap\dots\cap A_n) = \prod_{i=1}^n \frac{2}{3} = \frac{2^n}{3^n}.$$

2. Notons B_j l'événement "l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture". D'après la question précédente, on a $P(B_j) = 2^n/3^n$ pour $j = 1,\dots,4$. Le livre est entièrement corrigé après la n-ième relecture si l'événement $\bigcap_{j=1}^4 \overline{B_j}$ est réalisé. Les événements B_j étant indépendants, le livre est entièrement corrigé après n relectures avec une probabilité valant

$$\prod_{j=1}^4 \left(1-\frac{2^n}{3^n}\right) = \left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^4.$$

Cette probabilité est supérieure à $0,9$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^4 \geq 0.9 &\iff \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1-(0.9)^{1/4} \\ &\iff n\ln(2/3) \leq \ln(1-0.9^{1/4}) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(1-0.9^{1/4})}{\ln(2/3)} \end{aligned}$$

et donc ceci fonctionne dès que $n \geq 10$.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Notons A_k l'événement "A gagne la k-ième partie" et B_k l'événement "B gagne la k-ième partie". L'événement "ni A ni B ne gagne" est égal à $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n-1}} \cap \overline{B_{2n}}$. Ces événements étant indépendants, la probabilité recherchée vaut $(1-a)^n(1-b)^n$.

2. L'événement "A gagne" est égal à la réunion des événements suivants : A_1, $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3$, $\dots$, $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2n-2}} \cap A_{2n-1}$. Maintenant, on a

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2k-2}} \cap A_{2k-1}) = (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a$$

et donc la probabilité que A gagne vaut

$$a\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^k(1-b)^k = a \times \frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{a+b-ab}.$$

On peut fait un calcul similaire ou utiliser le fait que

$$P(A \text{ gagne}) + P(B \text{ gagne}) + P(\text{match nul}) = 1$$

pour démontrer que

$$P(B \text{ gagne}) = b(1-a)\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^k(1-b)^k = b(1-a) \times \frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{a+b-ab}.$$

3. Le jeu est équilibré si et seulement si A et B ont la même probabilité de gagner, c'est-à-dire si et seulement si $a = b(1-a)$.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On sait que

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right).$$

Utilisant la continuité décroissante, puis l'indépendance des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n} P\left(\overline{A_k}\right).$$

2. Notons $v_n = \prod_{k=0}^n u_k$ et remarquons que $v_n \to 0$ si et seulement si $\ln(v_n) \to -\infty$. Or,

$$\ln(v_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$$

et puisque $\ln(u_k) < 0$, la suite $(\ln(v_n))_n$ est décroissante. Ainsi, elle tend vers $-\infty$ si et seulement si elle diverge, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_k \ln(u_k)$ diverge. Ainsi, on a démontré l'équivalence de (a) et (b). Démontrons ensuite l'équivalence de (b) et (c). Si (u_k) ne tend pas vers 1, les deux séries sont grossièrement divergentes. Si (u_k) tend vers 1, alors écrivons

$$\ln(u_k) = \ln(1-(1-u_k)) \sim_{k\to+\infty} -(1-u_k).$$

Puisque $1-u_k \leq 0$, les séries $\sum_k \ln(u_k)$ et $\sum_k \ln(1-u_k)$ sont de même nature.

3. On a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 &\iff \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k}) = 0 \\ &\iff \sum_k (1-P(\overline{A_k})) \text{ diverge} \\ &\iff \sum_k P(A_k) \text{ diverge.} \end{aligned}$$

4. Commençons par calculer $\prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k}) &= \prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)\\ &= \prod_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\\ &= \frac{(n+1)!(n+3)!}{2((n+2)!)^2}\\ &= \frac{n+3}{2(n+2)}.\end{aligned}$$

D'après le résultat de la première question,

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1-\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{2(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Les événements $B_1,\dots,B_n$ étant indépendants, on a $P(B_1\cap\dots\cap B_n)=\prod_{i=1}^{n} P(B_i)>0$ puisque $P(B_i)\in]0,1[$. Ainsi, on a $B_1\cap\dots\cap B_n\neq\varnothing$.

2. Soit k tel que $B_k\neq B'_k$. Alors on a nécéssairement $B_k\cap B'_k=\varnothing$. Et donc $(B_1\cap\dots\cap B_n)\cap(B'_1\cap\dots\cap B'_n)=\varnothing$.

3. Pour chaque n-uplet $B=(B_1,\dots,B_n)$, il existe un élément $x_B\in B_1\cap\dots\cap B_n$. Ces éléments x_B sont deux à deux différents d'après la question précédente, et comme il y a 2^n tels n-uplets, le cardinal de Ω est supérieur ou égal à 2^n.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. On sait que x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x. On a donc :

$$B=\overline{A_{p_1}}\cap\dots\cap\overline{A_{p_r}}.$$

2. Puisque qu'on est en situation d'équiprobabilité, il suffit de calculer le cardinal de A_m. Mais si $n=km$, alors les multiples de m qui sont inférieurs ou égaux à n sont m, $2m,\dots,km$. On a donc

$$P(A_m)=\frac{k}{n}=\frac{1}{m}.$$

3. Soit $i_1<\dots<i_m$ des entiers distincts choisis dans $\{1,\dots,r\}$. On doit prouver que

$$P(A_{p_{i_1}})\dots P(A_{p_{i_m}})=P(A_{p_{i_1}}\cap\dots\cap A_{p_{i_m}}).$$

Mais,

$$P(A_{p_{i_1}})\dots P(A_{p_{i_m}})=\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{p_{i_j}}.$$

D'autre part, puisque $p_{i_1},\dots,p_{i_m}$ sont premiers entre eux deux à deux, un entier est multiple de $p_{i_1}\dots p_{i_m}$ si et seulement s'il est multiple de chaque p_{i_j}, $j=1,\dots,m$. On en déduit que

$$A_{p_{i_1}}\cap\dots\cap A_{p_{i_m}}=A_{p_{i_1}\dots p_{i_m}},$$

soit

$$P(A_{p_{i_1}}\cap\dots\cap A_{p_{i_m}})=\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_m}},$$

ce qui prouve le résultat voulu.

4. Les événements $\overline{A_{p_1}}, \dots, \overline{A_{p_r}}$ sont également indépendants. On en déduit que

$$P(B) = \prod_{j=1}^{r} P(\overline{A_{p_j}}) = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

5. On sait aussi, par le modèle de l'équiprobabilité et puisque le cardinal de B est égal à $\phi(n)$, que

$$P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$$

ce qui, grâce à la question précédente, donne le résultat voulu.

Correction de l'exercice 27 ▲

Supposons d'abord que $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$. En particulier, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_A(A) = 1$. Ainsi, A doit être un événement presque sûr. Réciproquement, si on suppose que $\mathbb{P}(A) = 1$, alors pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Maintenant, on sait que

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B).$$

Mais puisque $\bar{A} \cap B \subset \bar{A}$ et que $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B).$$

Ainsi, $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$ si et seulement si A est un événement presque sûr.

Correction de l'exercice 28 ▲

1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte". D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1}) = P(I_{n+1}|I_n)P(I_n) + P(I_{n+1}|\overline{I_n})P(\overline{I_n}).$$

Mais, $P(I_{n+1}|I_n) = p$ (l'information doit être transmise correctement) et $P(I_{n+1}|\overline{I_n}) = 1 - p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que

$$p_{n+1} = p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p).$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie

$$l = (2p-1) \times l + (1-p) \iff l = 1/2.$$

On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

3. On distingue alors trois cas :

Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n. Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n. Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers 1/2. On n'a plus de traces de l'information initiale !

4. Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n.

5. Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n.

6. Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers 1/2. On n'a plus de traces de l'information initiale !

Correction de l'exercice 29 ▲

1. Le calcul du polynôme caractéristique de la matrice M est grandement facilité en développant par rapport à la deuxième colonne. On trouve que le polynôme caractéristique est

$$\chi_M(x) = \frac{1}{9}(1-x)\left(\frac{3}{4} - 6x + 9x^2\right).$$

Les valeurs propres sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$. Une matrice P possible est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

d'inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. Par hypothèse d'équiprobabilité, on a $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}$.

3. On va utiliser la formule des probabilités totales. L'énoncé nous donne

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$$

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = 0,\ P_{B_n}(B_{n+1}) = 1$$

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{7}P_{C_n}(B_{n+1}),\ P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

Utilisant que

$$P_{C_n}(A_{n+1}) + P_{C_n}(B_{n+1}) + P_{C_n}(C_{n+1}) = 1,$$

on trouve finalement que

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{12},\ P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{7}{12}.$$

Les trois événements A_n, B_n et C_n constituant un système complet d'événements, la formule des probabilités totale donne maintenant

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n. \end{aligned}$$

De même, on trouve que

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n,\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n.$$

4. C'est évident !

5. On a $X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$ et comme on sait calculer D^n, on trouve après calculs

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right),\ b_n = 1 - \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

6. Les suites (a_n) et (c_n) tendent vers 0, la suite (b_n) tend vers 1.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. On note A l'événement "avoir un accident dans l'année". Comme les trois classes R_1, R_2 et R_3 réalisent une partition de la population. On peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|R_1)P(R_1)+P(A|R_2)P(R_2)+P(A|R_3)P(R_3) \\ &= 0,05\times 0,2+0,15\times 0,5+0,3\times 0,3 \\ &= 0,175. \end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité d'être dans R_1 sachant qu'on n'a pas eu d'accident, c'est-à-dire la probabilité $P(R_1|\overline{A})$. La formule de Bayes donne :

$$P(R_1|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|R_1)P(R_1)}{P(\overline{A})}.$$

La probabilité $P(\overline{A})$ se calcule par la formule $P(\overline{A}) = 1-P(A)$, tandis que l'énoncé donne $P(\overline{A}|R_1) = 0,95$. On obtient finalement :

$$P(R_1|\overline{A}) = \frac{0,95\times 0,2}{1-P(A)} \simeq 0,23.$$

Correction de l'exercice 31 ▲

Notons M l'événement "l'arbre étudié est malade", et respectivement C,H,Q l'événement "l'arbre étudié est un chêne (resp. un hêtre, un peuplier)". On cherche à connaitre $P_M(C)$. Par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_M(C) &= \frac{P_C(M)P(C)}{P_C(M)P(C)+P_H(M)P(H)+P_Q(M)P(Q)} \\ &= \frac{0,1\times 0,3}{0,1\times 0,3+0,04\times 0,5+0,25\times 0,2} \\ &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve que

$$P_M(H) = \frac{5}{10},\ P_M(Q) = \frac{2}{10}.$$

On vérifie bien que la somme des probabilités vaut 1.

Correction de l'exercice 32 ▲

Les chiffres donnés ont l'air excellent, mais ils donnent l'inverse de ce que l'on souhaite. Le problème est plutôt le suivant : si une personne a une réponse positive au test, est-elle malade ? C'est la formule de Bayes qui permet de remonter le chemin. Précisément, on note M l'événement "La personne est malade", et T l'événement "le test est positif". Les données dont on dispose sont $P(M) = 10^{-4}$, $P(T|M) = 0{,}99$ et $P(T|\bar{M}) = 0{,}001$. On cherche $P(M|T)$. La formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned} P(M|T) &= \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M)+P(T|\bar{M})P(\bar{M})} \\ &= \frac{10^{-4}\times 0,99}{10^{-4}\times 0,99+10^{-3}\times 0,9999} \\ &\simeq 0,09. \end{aligned}$$

C'est catastrophique ! La probabilité pour qu'une personne positive au test soit effectivement malade est inférieure à 10%. Le test engendre donc beaucoup de faux-positifs (personnes positives au test, mais non malades). C'est tout le problème des maladies assez rares : les test de dépistage doivent être extrêmement fiables. Remarquons par ailleurs ici une bonne illustration du vieil adage des statisticiens : on peut faire dire n'importe quoi aux chiffres, cf le laboratoire pharmaceutique !

Correction de l'exercice 33 ▲

Soit x la proportion de tricheurs dans la population. On note respectivement P,F,H,T les événements "le joueur obtient pile", "le joueur obtient face", "Le joueur est honnête", "le joueur est un tricheur". Il semble raisonnable de convenir que $P(P|H)=1/2$ et $P(F|H)=1/2$ et $P(P|T)=1$ (un tricheur fait vraiment ce qu'il veut !). On cherche donc $P(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$P(T|P)=\frac{P(P|T)P(T)}{P(P|T)P(T)+P(P|H)P(H)}=\frac{x}{x+1/2(1-x)}=\frac{2x}{x+1}.$$

Le résultat est plus ou moins réconfortant suivant la proportion de tricheurs x dans la population !

Correction de l'exercice 34 ▲

1. Voici un algorithme possible. La variable machine représente la machine avec laquelle on joue (0 pour la machine A, 1 pour la machine B). import random def jouer(n) : machine=0 total=0 if (random.random()>0.5) : machine=1 else : machine=0 for i in range(n) : if (machine==0) : if (random.random()<0.2) : total=total+1 else : machine=1 else : if (random.random()<0.1) : total=total+1 else : machine=0 return (total/n)

2. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(G_1)=P(G_1|A_1)P(A_1)+P(G_1|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}.$$

3. Le plus facile, pour calculer G_2, est de réaliser un arbre de probabilités avec 8 feuilles. La première bifurcation correspond au choix initial de la machine. La deuxième bifurcation correspond au résultat possible du premier tirage. La troisième bifurcation correspond au résultat possible du deuxième tirage. On trouve finalement :

$$P(G_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{5}\right)=\frac{31}{200}.$$

Si on veut écrire ceci plus formellement, on peut dire que $A_1\cap A_2$, $A_1\cap\overline{A_2}$, $\bar{A_1}\cap A_2$ et $\bar{A_1}\cap\bar{A_2}$ est une partition de Ω et donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(G_2)=&P(A_1\cap A_2)P(G_2|A_1\cap A_2)+P(A_1\cap\bar{A_2})P(G_2|A_1\cap\bar{A_2})\\&+P(\bar{A_1}\cap A_2)P(G_2|\bar{A_1}\cap A_2)+P(\bar{A_1}\cap\bar{A_2})P(G_2|\bar{A_1}\cap\bar{A_2}).\end{aligned}$$

Reste à calculer les diverses probabilités. Par exemple,

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$$

tandis que

$$P(G_2|A_1\cap A_2)=P(G_2|A_2)=1/5.$$

4. Appliquons la formule de Bayes : on a

$$P(A_1|G_2)=\frac{P(A_1\cap G_2)}{P(G_2)}=\frac{P(G_2|A_1)P(A_1)}{P(G_2)}.$$

La probabilité conditionnelle $P(G_2|A_1)$ se calcule également avec un arbre (en fait, un extrait de l'arbre de la question précédente), et on trouve

$$P(G_2|A_1)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{25}.$$

On en déduit que

$$P(A_1|G_2)=\frac{3}{50}\times\frac{200}{31}=\frac{12}{31}.$$

5. On applique la formule des probabilités totales comme à la première question. On trouve

$$\begin{aligned}
P(G_k) &= P(G_k|A_k)P(A_k)+P(G_k|\overline{A_k})P(\overline{A_k})\\
&= \frac{1}{5}P(A_k)+\frac{1}{10}(1-P(A_k))\\
&= \frac{1}{10}\big(1+P(A_k)\big).
\end{aligned}$$

On joue sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie si et seulement si

on joue sur la machine $\mathscr{A}$ la k-ième partie et on gagne ; on joue sur la machine $\mathscr{B}$ la k-ième partie et on perd.

On a donc

$$\begin{aligned}
P(A_{k+1}) &= P(G_k\cap A_k)+P(\overline{G_k}\cap\overline{A_k})\\
&= P(G_k|A_k)P(A_k)+P(\overline{G_k}|\overline{A_k})P(\overline{A_k})\\
&= \frac{1}{5}P(A_k)+\frac{9}{10}\big(1-P(A_k)\big)\\
&= \frac{-7}{10}P(A_k)+\frac{9}{10}.
\end{aligned}$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique. L'équation aux limites possibles

$$\ell=\frac{-7\ell}{10}+\frac{9}{10}$$

donne $\ell=\frac{9}{17}$. On introduit ensuite $v_k=P(A_k)-\frac{9}{17}$ et on vérifie facilement que

$$v_{k+1}=\frac{-7}{10}v_k.$$

On a donc $v_k=\left(\frac{-7}{10}\right)^{k-1}v_1$ et donc

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}\left(P(A_1)-\frac{9}{17}\right)+\frac{9}{17}\\
&= \frac{-1}{34}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}+\frac{9}{17}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$P(G_k)=\frac{13}{85}-\frac{1}{340}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

On reconnait la somme d'une suite géométrique. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}P(G_k) &= \frac{13}{85}n-\frac{1}{340}\left(\frac{1-\left(-\frac{7}{10}\right)^n}{1+\frac{7}{10}}\right)\\
&= \frac{13n}{85}-\frac{1}{34\times 17}\left(1-\left(-\frac{7}{10}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

En particulier, on a que S_n/n tend vers $\frac{13}{85}$, ce qui est proche du résultat trouvé en faisant tourner l'algorithme de la première question pour une grande valeur de n.

6. On applique la formule des probabilités totales comme à la première question. On trouve

$$\begin{aligned}
P(G_k) &= P(G_k|A_k)P(A_k)+P(G_k|\overline{A_k})P(\overline{A_k})\\
&= \frac{1}{5}P(A_k)+\frac{1}{10}(1-P(A_k))\\
&= \frac{1}{10}\big(1+P(A_k)\big).
\end{aligned}$$

7. On joue sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie si et seulement si

on joue sur la machine $\mathscr{A}$ la k-ième partie et on gagne ; on joue sur la machine $\mathscr{B}$ la k-ième partie et on perd.

On a donc

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(G_k \cap A_k) + P(\overline{G_k} \cap \overline{A_k}) \\ &= P(G_k|A_k)P(A_k) + P(\overline{G_k}|\overline{A_k})P(\overline{A_k}) \\ &= \frac{1}{5}P(A_k) + \frac{9}{10}\big(1 - P(A_k)\big) \\ &= \frac{-7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

8. on joue sur la machine $\mathscr{A}$ la k-ième partie et on gagne ;

9. on joue sur la machine $\mathscr{B}$ la k-ième partie et on perd.

10. On reconnait une suite arithmético-géométrique. L'équation aux limites possibles

$$\ell = \frac{-7\ell}{10} + \frac{9}{10}$$

donne $\ell = \frac{9}{17}$. On introduit ensuite $v_k = P(A_k) - \frac{9}{17}$ et on vérifie facilement que

$$v_{k+1} = \frac{-7}{10}v_k.$$

On a donc $v_k = \left(\frac{-7}{10}\right)^{k-1} v_1$ et donc

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}\left(P(A_1) - \frac{9}{17}\right) + \frac{9}{17} \\ &= \frac{-1}{34}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} + \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$P(G_k) = \frac{13}{85} - \frac{1}{340}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

11. On reconnait la somme d'une suite géométrique. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(G_k) &= \frac{13}{85}n - \frac{1}{340}\left(\frac{1-\left(-\frac{7}{10}\right)^n}{1+\frac{7}{10}}\right) \\ &= \frac{13n}{85} - \frac{1}{34\times 17}\left(1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a que S_n/n tend vers $\frac{13}{85}$, ce qui est proche du résultat trouvé en faisant tourner l'algorithme de la première question pour une grande valeur de n.