**Chapitre :** Fonctions convexes

# 1 Inégalités de convexité

### Exercice 1 ★ Sinus –

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Indication ▼ Correction ▼ [604]

### Exercice 2 ★ Inégalité de Bernoulli –

Soit $n \geq 2$.
1. Étudier la convexité de la fonction $f$ définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Indication ▼ Correction ▼ [3084]

### Exercice 3 ★★ Exponentielle –

Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(\lambda x) \leq \operatorname{ch}(\lambda) + x\operatorname{sh}(\lambda).$$

Indication ▼ Correction ▼ [3187]

### Exercice 4 ★★ Une application de l'inégalité de Jensen –

1. Étudier la convexité/concavité de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [3188]

### Exercice 5 ★★ Moyenne arithmétique et géométrique –

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [605]

### Exercice 6 ★★★ Encadrement d'intégrale –

Soit $f$ une fonction convexe de classe $C^1$ sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [606]

### Exercice 7 ★★★ Majoration de $f$ grâce à $f''$ –

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1. Justifier l'existence de $M$.
2. Montrer que $g$ est convexe et que $h$ est concave.
3. Déterminer le signe de $g$ et de $h$ sur $[a,b]$. En déduire que, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [608]

### Exercice 8 Une jolie inégalité de convexité –

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in ]0,+\infty[$, alors

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{1/n}.$$

3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in ]0,+\infty[$, alors

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [1730]

### Exercice 9 Inégalités de Hölder et de Minkowski –

Soit $x, y \in{}^*_+$, $p, q \in [1,+\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$, et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1. Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.
3. En déduire la splendide inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

5. On définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [609]

### Exercice 10 Avec des puissances –

Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$x^n - 1 \geq n\left(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2}\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [607]

## 2 Propriétés des fonctions convexes

**Exercice 11** ★ **Composée de fonctions convexes –**

Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f$ et $g$ soient convexes, et $g$ est croissante. Démontrer que $g\circ f$ est convexe.

Indication ▼ Correction ▼ [1727]

**Exercice 12** ★ **Minimum et maximum –**

Soit $f,g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle.

1. Est-ce que $\max(f,g)$ est toujours convexe ?
2. Est-ce que $\min(f,g)$ est toujours convexe ?

Indication ▼ Correction ▼ [3189]

**Exercice 13** ★★ **Réciproque d'une fonction convexe –**

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1}:f(I)\to I$.

Indication ▼ Correction ▼ [1729]

**Exercice 14** ★★ **Une fonction convexe est toujours continue –**

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ convexe. Démontrer que $f$ est continue sur $I$. Le résultat subsiste-t-il si $I$ n'est plus supposé ouvert ?

Indication ▼ Correction ▼ [1726]

**Exercice 15** ★★ **Minimum local est en fait global –**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si $f$ admet un minimum local en $a$, alors $f$ admet un minimum global en $a$. Que peut-on dire si $f$ admet un maximum local en $a$ ?

Indication ▼ Correction ▼ [1728]

**Exercice 16** ★★ **Fonctions convexes sur un intervalle borné –**

Soit $f$ une fonction convexe sur l'intervalle borné $]a,b[$.

1. Montrer que $f$ est minorée.
2. $f$ est-elle nécessairement majorée ?

Indication ▼ Correction ▼ [611]

**Exercice 17** ★★ **Fonctions convexes croissantes –**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que $f$ est constante ou que $\lim_{+\infty} f=+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [612]

**Exercice 18** ★★★ **Fonction convexe avec une limite en $+\infty$ –**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $f'$ tend vers 0 en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que $f$ est convexe ?

Indication ▼ Correction ▼ [3190]

**Exercice 19** ★★★ **Fonctions convexes admettant une asymptote –**

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim_{+\infty} f=0$. Montrer que $f\geq 0$.
2. Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction affine est convexe.

3. On suppose que la courbe représentative de $f$ admet une asymptote. Montrer que la courbe est (toujours) au-dessus de l'asymptote.

Indication ▼ Correction ▼ [613]

# 3 Divers

**Exercice 20** ★ **Concentration d'un médicament** –

On injecte à un patient un médicament. La concentration de ce médicament dans le sang du patient est modélisée par la fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = (x+2)\exp(-0{,}5x)$, où $x$ représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. Étudier la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative.
2. Au bout de combien d'heures la baisse de la concentration ralentit-elle ?

Indication ▼ Correction ▼ [3185]

**Exercice 21** ★★ **Algorithme de trichotomie** –

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On pose $a_0 = a$, $a_1 = (2a+b)/3$, $a_2 = (a+2b)/3$ et $a_3 = b$. On pose également

$$\mu = \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}.$$

1. On suppose que $\mu \leq 0$. Justifier que $f$ atteint son minimum sur $[a,b]$ sur l'intervalle $[a_1,a_3]$.
2. On suppose que $\mu > 0$. Justifier que $f$ atteint son minimum sur $[a,b]$ sur l'intervalle $[a_0,a_2]$.
3. Écrire une fonction sous Python permettant de donner un encadrement d'amplitude $\varepsilon$ du minimum de la fonction convexe $x \mapsto e^x + x^2$, sachant que ce minimum se situe dans l'intervalle $[-1,0]$.

Indication ▼ Correction ▼ [2991]

**Exercice 22** ★★★★★ **Hypothèse affaiblie** –

Soit $f :\to$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Prouver que $f$ est convexe.

Indication ▼ Correction ▼ [616]

**Exercice 23** ★★★★★ $xf(x)$ **est convexe si et seulement si** $f(1/x)$ **est convexe.** –

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Démontrer que $x \mapsto f(1/x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto xf(x)$ est convexe.

Indication ▼ Correction ▼ [3150]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Le sinus est concave sur $[0, \pi/2]$.

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

1.
2. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ en 0 ?

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Appliquer la convexite de la fonction exponentielle entre $\lambda$ et $-\lambda$, avec un coefficient bien choisi.

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

1. Dérivée seconde !
2. Poser $y_i = \ln(x_i)$ et appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction précédente et aux $y_i$.

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Utiliser la concavité du logarithme.

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Écrire d'une part que la courbe est sous la corde joignant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$, et d'autre part qu'elle est au-dessus de la tangente passant par $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

1. Que dire d'une fonction continue sur un segment ?
2. Calculer la dérivée seconde.
3. La courbe représentative de $g$ est sous sa corde.

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. Calculer la dérivée seconde.
2. Appliquer la convexité de $f$ avec $a_k = \ln x_k$ et utiliser les propriétés fonctionnelles des fonctions logarithme et exponentielle.
3. Factoriser par $\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}$ puis appliquer l'inégalité précédente.

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

1. Utiliser la concavité du logarithme.
2.
3. Raisonner par homogénéité, en posant $\alpha_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p}}$.
4. Décomposer $(a_i + b_i)^p$ en $(a_i + b_i)^{p-1} a_i + (a_i + b_i)^{p-1} b_i$.
5.

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Factoriser par $x - 1$ de par et d'autre, puis utiliser une inégalité de convexité...

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Revenir à la définition.

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Commencer par faire des dessins pour deviner la réponse !

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Revenir à la définition. Bizarrement, on doit trouver une fonction concave !

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

Utiliser l'inégalité des pentes pour démontrer que $f$ est continue à droite en tout point.

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

Utiliser l'inégalité des pentes. Pour la deuxième question, on démontrera que $f$ est constante au voisinage de $a$.

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

Utiliser l'inégalité sur les pentes !

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

Si $f$ n'est pas constante, trouver $x_1 < x_2$ avec $f(x_1) < f(x_2)$ et comparer la position de la courbe représentative de $f$ à la corde passant par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

1. Procéder par l'absurde en utilisant la position de la courbe par rapport à ses sécantes.
2. Commencer par remarquer que $f'$ admet une limite en $+\infty$ puis utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer que cette limite doit être nulle.
3.

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

1. Supposer qu'il existe $x_0$ avec $f(x_0) < 0$, puis fabriquer $x_1 > x_0$ tel que $f(x_0) < f(x_1)$. Utiliser l'inégalité des pentes pour prouver que $f$ tend vers $+\infty$.
2. Revenir à la définition.
3. Retrancher à $f$ l'équation de l'asymptote.

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

1.
2. La concentration est mesurée par $f$, la vitesse d'évolution de la concentration est mesurée par $f'$, le moment où la vitesse ralentit va se mesurer par $f''$. On cherche donc le(s) point(s) d'inflexion de $f$.

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

Penser à utiliser l'inégalité des pentes.

**Indication pour l'exercice 22 ▲**

Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour tous $(x, y)$ dans , pour tout $p \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, on a :

$$f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

**Indication pour l'exercice 23 ▲**

Remarquer que

$$\frac{1}{ta+(1-t)b} = s\alpha + (1-s)\beta$$

avec $\alpha = \dfrac{1}{a}$, $\beta = \dfrac{1}{b}$ et $s = \dfrac{ta}{ta+(1-t)b}$.

---

**Correction de l'exercice 1 ▲**

Puis $(\sin)'' = -\sin$, la fonction sinus est concave sur $[0,\pi/2]$. Sa courbe représentative est donc, sur cet intervalle, en-dessous de sa tangente en 0, et au-dessus de la corde joignant $(0,\sin 0)$ à $(\pi/2,\sin(\pi/2))$. Or, l'équation de cette tangente est $y = x$, et l'équation de cette corde est $y = \frac{2}{\pi}x$. On obtient exactement le résultat demandé.

**Correction de l'exercice 2 ▲**

1. $f$ est deux fois dérivable sur $[-1,+\infty[$. De plus, pour tout $x \geq -1$, on a

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \text{ et } f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geq 0.$$

Ainsi, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \geq -1$. On en déduit que $f$ est convexe sur $[-1,+\infty[$.

2. Puisque $f'(0) = n$, l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point $(0, f(0))$ est $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ soit $y = 1+nx$. La fonction étant convexe, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. Donc, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

**Correction de l'exercice 3 ▲**

Nous allons appliquer la définition de la convexité à la fonction exp, avec des points et des coefficients bien choisis. Pour comprendre d'où viennent ces points et ces coefficients, remarquons que l'inégalité que l'on cherche à prouver est équivalente à

$$\exp(\lambda x) \leq \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} + x\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$$

qui est encore équivalente à

$$\exp(\lambda x) \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)e^\lambda + \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{-\lambda}.$$

On pose alors $t = \frac{1+x}{2} \in [0,1]$ de sorte que $1-t = \frac{1-x}{2}$ et on applique la définition de la convexité de la fonction exponentielle avec les points $\lambda$ et $-\lambda$, et avec $t$. On obtient directement l'inégalité demandée, sous la forme équivalente obtenue ci-dessus.

**Correction de l'exercice 4 ▲**

1. Notons $f$ cette fonction. La fonction $f$ est clairement de classe $C^\infty$ et sa dérivée seconde vérifie

$$f''(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x+1)^3}.$$

La fonction exponentielle étant croissante, $f''$ est du signe de $2x - x = x$. Ainsi, $f'' \geq 0$ sur $[0,+\infty[$ et $f'' \leq 0$ sur $]-\infty,0]$. Ainsi, $f$ est concave sur $]-\infty,0[$ et convexe sur $]0,+\infty[$.

2. Posons, pour $i = 1,\dots,n$, $y_i = \ln(x_i) \geq 0$. Appliquons l'inégalité de Jensen à $f$, aux $y_i$, avec pour coefficients $1/n$. On obtient

$$f\left(\frac{\ln(x_1)+\dots+\ln(x_n)}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\ln(x_k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}.$$

On conclut en remarquant que

$$\frac{\ln(x_1)+\dots+\ln(x_n)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right).$$

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Par concavité du logarithme :

$$\ln\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(a_1)+\dots+\ln(a_n)}{n}.$$

Or,

$$\frac{\ln(a_1)+\dots+\ln(a_n)}{n}=\ln\left(\sqrt[n]{a_1\dots a_n}\right).$$

On conclut en utilisant le fait que la fonction exponentielle est croissante.

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

---

La corde passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ a pour équation

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Pour les points d'abscisse comprise entre $a$ et $b$, la courbe représentative de $f$ est au-dessous de cette corde, c'est-à-dire que

$$f(t)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$$

pour $t\in[a,b]$. On intègre cette inégalité entre $a$ et $b$ et on trouve

$$\int_a^b f(t)dt\leq\big(f(b)-f(a)\big)\frac{(b-a)}{2}+f(a)(b-a)=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Cette inégalité a aussi une interprétation (et une preuve !) géométrique simple si $f$ est plus positive. Notons $A$, $B$, $C$ et $D$ les points $A(a,0)$, $B(a,f(a))$, $C(b,f(b))$, $D(b,0)$. Alors

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\times(b-a)$$

est égal à l'aire du trapèze $ABCD$. Comme la fonction $f$ est convexe, et donc que la courbe représentative de $f$ est sous le segment $[AB]$, l'aire de ce trapèze est supérieure ou égal à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de $f$, et les droites $x=a$, $x=b$. L'aire de ce domaine est exactement $\int_a^b f(x)dx$. Pour prouver l'autre inégalité, il suffit de remarquer que la courbe représentative de $f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $(a+b)/2$. Autrement dit, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$f(t)\geq f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Intégrer cette inégalité entre $a$ et $b$ donne exactement

$$\int_a^b f(t)dt\geq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

puisque

$$\int_a^b\left(t-\frac{a+b}{2}\right)dt=0.$$

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

---

1. $f''$ est continue sur le segment $[a,b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.

2. On calcule les dérivées secondes qui sont $g''(x)=f''(x)+M\geq 0$ et $h''(x)=f''(x)-M\leq 0$. Ceci prouve bien que $g$ est convexe et que $h$ est concave.

3. Par convexité de $g$, et puisque $g(a)=g(b)=0$, on sait que la courbe représentative de $g$ est sous la corde reliant $(a,g(a))$ à $(b,g(b))$ et donc

$$g(x)\leq 0\implies f(x)\leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

De même, la courbe représentative de $h$ est au-dessus de ses cordes, et donc

$$h(x)\geq 0\implies f(x)\geq -M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Les deux inégalités réunies donnent exactement l'inégalité demandée.

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

1. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est $x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ qui est une fonction positive.

2. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. La convexité de $f$ entraîne que

$$\ln\left(1+e^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}\right) \leq \frac{\ln(1+e^{a_1})+\cdots+\ln(1+e^{a_n})}{n}$$

ce qui par les propriétés fonctionnelles des fonctions logarithme et exponentielle donne

$$\ln\left(1+\left(\prod_{k=1}^n e^{a_k}\right)^{1/n}\right) \leq \ln\left(\left(\prod_{k=1}^n (1+e^{a_k})\right)^{1/n}\right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit

$$1+\left(\prod_{k=1}^n e^{a_k}\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+e^{a_k})\right)^{1/n}.$$

C'est exactement le résultat voulu, pourvu que l'on choisisse $a_k = \ln x_k$.

3. En factorisant, on trouve

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(1+\left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right).$$

On applique l'inégalité de la fonction précédente à $x_k = b_k/a_k$, et on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

Il suffit de tout mettre au dénominateur dans le dernier terme pour obtenir le résultat demandé.

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

1. La fonction ln est concave, et on a donc :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy).$$

Il suffit ensuite d'utiliser la croissance de la fonction exponentielle pour en déduire le résultat voulu.

2. Il suffit de sommer les $n$ équations :

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p}a_i^p + \frac{1}{q}b_i^q.$$

3. On pose $\alpha_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}}$ et $\beta_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}}$. D'après la question précédente,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq 1.$$

Il suffit ensuite de remplacer $\alpha_i$ et $\beta_i$ par leur valeur pour trouver la formule.

4. On décompose $(a_i+b_i)^p$ en $(a_i+b_i)^{p-1}a_i+(a_i+b_i)^{p-1}b_i$. Soit $q$ tel que $1/p+1/q=1$, c'est à dire que $pq-q=p$. En appliquant Hölder à chacun des membres, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\times\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\times\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\ &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right]\times\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

Il suffit de tout refaire passer au premier membre pour obtenir le résultat. Remarquons que le résultat est aussi vrai pour $p=1$. Dans ce cas, il est juste trivial !

5. L'inégalité précédente se traduit très facilement en disant que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire $\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p$. Il est en outre trivial de vérifier que $\|\lambda x\|_p=|\lambda|\|x\|_p$ et que $\|x\|_p=0\iff x=0$. Ainsi, $\|\cdot\|_p$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

Si on simplifie par $x-1>0$, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$1+x+\dots+x^{n-1}\geq nx^{(n-1)/2}.$$

Pour démontrer cette inégalité, on pose, ($x>1$ est fixé) $f(y)=\exp(y\ln x)$. $f$ est une fonction convexe. En particulier, on a

$$\frac{1}{n}\big(f(0)+\dots+f(n-1)\big)\geq f\left(\frac{1}{n}\big(0+1+\dots+(n-1)\big)\right).$$

Mais le membre de gauche est $\frac{1}{n}(1+x+\dots+x^{n-1})$ tandis que celui de droite est

$$f\left(\frac{1}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}\right)=f((n-1)/2)=x^{(n-1)/2}.$$

On obtient donc bien l'inégalité voulue.

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

Soit $x,y\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in[0,1]$. Alors on a par convexité de $f$ :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Par croissance de $g$, on en déduit que

$$g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq g\big(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\big).$$

La convexité de $g$ permet de conclure à

$$g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda g\circ f(x)+(1-\lambda)g\circ f(y)$$

ce qui signifie bien que $g\circ f$ est convexe.

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

Il faut commencer par faire des dessins pour deviner la réponse !

1. Oui ! En effet, soit $x,y\in I$ et $t\in[0,1]$ et posons $h=\max(f,g)$. On a d'une part

$$f\big(tx+(1-t)y\big)\leq tf(x)+(1-t)f(y)\leq th(x)+(1-t)h(y)$$

et d'autre part

$$g\big(tx+(1-t)y\big)\leq tg(x)+(1-t)g(y)\leq th(x)+(1-t)h(y).$$

On en déduit bien que
$$h\big(tx+(1-t)y\big)\leq th(x)+(1-t)h(y),$$
c'est-à-dire que $h$ est convexe.

2. Non ! Choisissons par exemple $I=\mathbb{R}$, $f(x)=x$ et $g(x)=-x$, qui sont convexes car affines. Alors $\min(f,g)(x)=-|x|$, et cette fonction n'est bien sûr pas convexe (par exemple, la courbe représentative est au-dessus de la corde reliant $(-1,-1)$ à $(1,-1)$).

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

Soit $y_1,y_2\in f(I)$ et $x_1,x_2\in I$ tels que $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$. Soit aussi $t\in[0,1]$. Alors
$$f^{-1}\big(ty_1+(1-t)y_2\big)=f^{-1}\big(tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\big).$$
Par convexité de $f$,
$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\geq f(tx_1+(1-t)x_2).$$
Puisque $f^{-1}$ est croissante (la réciproque d'une fonction croissante est croissante), on en déduit que
$$f^{-1}\big(ty_1+(1-t)y_2\big)\geq f^{-1}\big(f(tx_1+(1-t)x_2)\big)=tx_1+(1-t)x_2=tf^{-1}(y_1)+(1-t)f^{-1}(y_2).$$
Ainsi, $f^{-1}$ est concave.

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

Soit $x_0\in I$. On va démontrer que $f$ est continue à droite en $x_0$. La preuve serait identique pour la continuité à gauche. Prenons $a<x_0$ et $b>x_0$ tels que $a,b\in I$. Alors, d'après l'inégalité des pentes, pour tout $x\in]x_0,b]$, on a
$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\leq\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$
ce qui donne
$$(x-x_0)\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\leq f(x)-f(x_0)\leq(x-x_0)\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}.$$
Par le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$
Le résultat devient faux si $I=[0,1]$ par exemple. En effet, la fonction non continue en 0 et en 1 définie par $f(x)=0$ si $x\in]0,1[$ et $f(0)=f(1)=1$ est convexe.

---

**Correction de l'exercice 15 ▲**

Supposons d'abord que $f$ admette un minimum local en $a$ et considérons $c>a$. Puisque $a$ est un minimum local de $f$, il existe $b\in]a,c[$ tel que $f(b)\geq f(a)$. Mais alors, par l'inégalité des pentes, on sait que
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq 0.$$
On en déduit que $f(c)\geq f(a)$. Le raisonnement aurait été similaire si on avait supposé $c<a$. On a donc bien prouvé que $a$ est un minimum global de $f$. Supposons maintenant que $f$ admette un maximum local en $a$ et considérons $b<a<c$ tels que pour tout $x\in[b,c]$, $f(x)\leq f(a)$. Considérons ensuite $x_1,x_2\in[b,c]$ avec $x_1\leq a\leq x_2$. Par l'inégalité des pentes à nouveau, on a
$$0\geq\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}\geq\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}\geq 0.$$
On en déduit que $f(x_1)=f(x_2)=f(a)$, puis que $f$ est constante sur $[b,c]$.

---

**Correction de l'exercice 16 ▲**

---

1. Soit $x_0 < x_1 < x_2$ trois points de $]a,b[$. Par l'inégalité des pentes, on sait que, pour tout $x \leq x_1$, on a

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ce qui entraine

$$f(x) \geq (x-x_1)\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}+f(x_1).$$

La fonction apparaissant à droite de l'inégalité étant bornée sur $]a,x_1]$, on en déduit que $f$ est minorée sur $]a,x_1]$. De la même façon, en travaillant à partir de la corde joignant $(x_0,f(x_0))$ à $(x_1,f(x_1))$, on a, pour $x \geq x_1$,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

ce qui implique

$$f(x) \geq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_1)+f(x_1).$$

Pour la même raison, ceci prouve que $f$ est minorée sur $[x_1,b[$.

2. $f$ n'est pas nécessairement majorée. Un contre-exemple est donnée par la fonction $1/x$ sur l'intervalle $]0,1[$.

---

**Correction de l'exercice 17 ▲**

Supposons $f$ non constante. On peut trouver $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$. Soit $y = ax+b$ l'équation de la corde passant par $(x_1,f(x_1))$ et $(x_2,f(x_2))$, avec donc $a>0$. Pour $x > x_2$, l'inégalité des pentes assure que le point de la courbe représentative de $f$ d'abscisse $x$ est au-dessus du point de la corde de même abscisse. Autrement dit, pour tout $x \geq x_2$, on a $f(x) \geq ax+b$. Ceci prouve que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

---

**Correction de l'exercice 18 ▲**

1. Supposons que $f$ n'est pas décroissante. Alors il existe $a<b$ tel que $f(b) > f(a)$. La droite passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ a pour équation

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

et on sait que pour les points d'abscisse supérieure ou égale à $b$, la courbe représentative de $f$ est au-dessus de cette droite. On a donc, pour $x \geq b$,

$$f(x) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Par théorème de comparaison, ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, une contradiction.

2. Puisque $f$ est décroissante, $f' \leq 0$. Puisque $f$ est convexe, $f'$ est croissante. Elle admet donc une limite $\ell \leq 0$ en $+\infty$. Si $\ell < 0$, et puisque $f'$ est croissante, on sait que $f'(x) \leq \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, avec l'inégalité des accroissements finis,

$$f(x)-f(0) \leq \ell \times x.$$

Le théorème de comparaison nous dit cette fois que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est aussi une contradiction.

3. Non ! Prenons par exemple la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors, en utilisant l'équivalent $\sin(x^2) \sim_0 x^2$, on vérifie que $f$ est continue en 0. De plus, $f$ est dérivable en 0 : en effet,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1.$$

$f$ est aussi clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(x^2)+2\cos(x^2).$$

Cette fonction ne tend pas vers 0 en $+\infty$, puisque $f'(\sqrt{2n\pi})=2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors que bien sûr $f$ tend vers 0 en $+\infty$.

---

**Correction de l'exercice 19 ▲**

1. Supposons qu'il existe un point $x_0$ tel que $f(x_0)<0$. Par définition de la limite de $f$ en $+\infty$, appliquée à $\varepsilon=|f(x_0)|/2$, on peut trouver $x_1>x_0$ tel que $f(x_1)>f(x_0)$. D'après l'inégalité des pentes pour les fonctions convexes, on a, pour tout $x\geq x_1$ :

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leq\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\implies f(x)\geq(x-x_1)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+f(x_1).$$

Ceci prouve que $\lim_{+\infty}f=+\infty$, une contradiction.

2. Soit $g(x)=f(x)+ax+b$. Alors, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et tout $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}g(tx+(1-t)y)&=f(tx+(1-t)y)+tax+(1-t)ay+tb+(1-t)b\\&\leq t(f(x)+ax+b)+(1-t)(f(y)+ay+b)\\&\leq tg(x)+(1-t)g(y)\end{aligned}$$

ce qui prouve que $g$ est convexe.

3. Soit $y=ax+b$ l'équation de l'asymptote. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit d'une asymptote au voisinage de $+\infty$. Mais alors, en posant $g(x)=f(x)-(ax+b)$, on sait que

$g$ est convexe ; $\lim_{+\infty}g=0$ (par définition de l'asymptote à une courbe représentative).

On en déduit $g\geq0$, ce qui exprime exactement que la courbe représentative de $f$ est toujours au-dessus de son asymptote.

4. $g$ est convexe ;
5. $\lim_{+\infty}g=0$ (par définition de l'asymptote à une courbe représentative).

---

**Correction de l'exercice 20 ▲**

1. La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $[0,+\infty[$, et pour tout $x\geq0$, on a

$$f'(x)=(-0{,}5x-1)\exp(-0{,}5x)+\exp(-0{,}5x)=-0{,}5x\exp(-0{,}5x).$$

Ainsi, $f'(x)\leq0$ et donc $f$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. De plus, par croissance comparée de la fonction exponentielle et des polynômes, on a $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Puisque $f(0)=2$ et que $f'(0)=0$, on en déduit la courbe représentative suivante :

2. La concentration est mesurée par $f$. La vitesse d'évolution de la concentration est mesurée par $f'$. Le moment où la vitesse de la baisse va se ralentir correspond au moment où $f''$ va changer de signe, passer de négatif à positif. Autrement dit, on cherche un point d'inflexion de $f$. Pour cela, on calcule la dérivée seconde, et on trouve

$$f''(x)=(-0{,}25x-0{,}5)\exp(-0{,}5x)$$

qui change de signe en $x=2$. Ainsi, la baisse de la concentration ralentit après 2h.

---

**Correction de l'exercice 21 ▲**

1. Par l'inégalité des pentes, on sait que, pour tout $x\leq a_1$, on a

$$\frac{f(a_1)-f(x)}{a_1-x}\leq\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=\mu\leq0.$$

Ainsi, $f(a_1)\leq f(x)$, et la fonction atteint son minimum sur $[a_1,a_3]$.

2. Cette fois, l'inégalité des pentes nous dit que, pour tout $x\geq a_2$, on a

$$0<\mu=\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}\leq\frac{f(x)-f(a_2)}{x-a_2}.$$

Ainsi, $f(x)\geq f(a_2)$, et $f$ atteint son minimum sur $[a_0,a_2]$.

3. from math import * def f(x) : return exp(x)+x*x def minimum(eps) : a0=-1 a3=0 while (a3-a0>eps) : a1=(2*a0+a3)/3 a2=(a0+2*a3)/3 mu=(f(a2)-f(a1))/(a2-a1) if (mu>0) : a3=a2 else : a0=a1 return [a0,a3]

Remarquons que l'algorithme se termine car la taille de l'intervalle est multiplié par $2/3$ à chaque étape.

---

**Correction de l'exercice 22 ▲**

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour tous $(x,y)$ dans , pour tout $p \in \{0,1,\dots,2^n\}$, on a :

$$f\left(\frac{p}{2^n}x+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Cette propriété est clairement vérifiée si $n=1$, supposons-la prouvée au rang $n$ et prouvons la au rang $n+1$. Quitte à échanger le rôle joué par $x$ et $y$, on peut toujours supposer que $p \leq 2^n$. On décompose le paquet de $2^{n+1}$ termes en deux paquets de $2^n$ termes :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}x+\frac{(2^n-p)}{2^n}y\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2^n y}{2^n}\right)\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p}{2^n}x+\frac{(2^n-p)}{2^n}y\right)+f(y)\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}f(x)+\frac{2^n-p}{2^n}f(y)+f(y)\right)\\
&\leq \frac{p}{2^{n+1}}f(x)+\left(\frac{2^n-p}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right)f(y)\\
&\leq \frac{p}{2^{n+1}}f(x)+\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}f(y).
\end{aligned}$$

Maintenant, si $\lambda \in [0,1]$, il existe une suite $\lambda_n$ de termes de la forme $p_n/2^n$ qui converge vers $\lambda$. Comme la fonction est continue, on peut passer à la limite dans l'inégalité obtenue par la récurrence : $f$ est convexe.

---

**Correction de l'exercice 23 ▲**

On souhaite lier des propriétés de convexité de $x \mapsto f(1/x)$ et des propriétés de convexité de $f$. Pour cela, il est naturel, étant donné $t \in [0,1]$ et $a,b>0$, d'essayer d'écrire

$$f\left(\frac{1}{ta+(1-t)b}\right) = f(s\alpha+(1-s)\beta)$$

avec $s \in [0,1]$ et $\alpha,\beta>0$. Cela va fonctionner si l'on observe que

$$\frac{1}{ta+(1-t)b} = \frac{ta}{ta+(1-t)b}\times\frac{1}{a}+\frac{(1-t)b}{ta+(1-t)b}\times\frac{1}{b}$$

et si on pose

$$s=\frac{ta}{ta+(1-t)b},\ \alpha=\frac{1}{a},\ \beta=\frac{1}{b}$$

en remarquant qu'on a alors

$$1-s=\frac{(1-t)b}{ta+(1-t)b}.$$

La démonstration est alors facile. Si on suppose que $x \mapsto xf(x)$ est convexe, soit $t \in [0,1]$, $\alpha,\beta>0$ et $\alpha,\beta,s$ donnés par la relation précédente. On a alors

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{ta+(1-t)b}\right) &= \frac{1}{s\alpha+(1-s)\beta}\times\big(s\alpha+(1-s)\beta\big)f(s\alpha+(1-s)\beta)\\
&\leq \frac{1}{s\alpha+(1-s)\beta}\times\big(s\alpha f(\alpha)+(1-s)\beta f(\beta)\big)
\end{aligned}$$

par la convexité de $x \mapsto xf(x)$. Puisque

$$\frac{s\alpha}{s\alpha+(1-s)\beta} = \frac{\frac{t}{ta+(1-t)b}}{\frac{t}{ta+(1-t)b}+\frac{1-t}{ta+(1-t)b}} = t$$

et que de la même façon

$$\frac{(1-s)\beta}{s\alpha+(1-s)\beta} = 1-t$$

on a prouvé que

$$f\left(\frac{1}{ta+(1-t)b}\right) \leq tf(1/a)+(1-t)f(1/b)$$

et donc que la fonction $x \mapsto f(1/x)$ est convexe. La réciproque se prouve exactement de la même façon, mais on part cette fois de $\alpha, \beta > 0$ et $s \in [0,1]$, et on choisit $a, b, t$ donnés par la relation précédente.