Chapitre : Limite de fonctions - continuité

1 Limites en un point - aspect pratique

Exercice 1 ★ Calcul de limites –

Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ en 1 **2.** $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1

3. $\dfrac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$ **4.** $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$

5. $x^5e^{-x^2}$ en $+\infty$ **6.** $\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$

7. $\dfrac{x\ln x+7}{x^2+4}$ en $+\infty$ **8.** $\dfrac{4\sin^2 x+3\cos(5x)}{x}$ en $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [205]

Exercice 2 ★★ Calculs de limites –

Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$ **2.** $\dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ en 0

3. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$ **4.** $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$ en 0

5. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$

Indication ▼ Correction ▼ [206]

Exercice 3 ★★ Avec la partie entière –

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f:x\mapsto\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor,\ g:x\mapsto x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor,\ h:x\mapsto x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor.$$

Indication ▼ Correction ▼ [214]

Exercice 4 ★★ Prolongement par continuité et limites usuelles ? –

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier ?

1. $f(x)=\exp(-1/x^2)$ si $x\neq 0$;
2. $g(x)=\exp(-1/x)$ si $x\neq 0$;
3. $h(x)=\sin(x+1)\ln|1+x|$ si $x\neq -1$.

Indication ▼ Correction ▼ [3210]

Exercice 5 ★★★ Prolongement par continuité et fonctions trigonométriques –

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $f(x)=\sin(1/x)$ si $x\neq 0$;
2. $g(x)=\sin(x)\sin(1/x)$ si $x\neq 0$;
3. $h(x)=\cos(x)\cos(1/x)$ si $x\neq 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [217]

Exercice 6 ★★★ Indicatrice de $\mathbb{Q}$ –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Indication ▼ Correction ▼ [218]

2 Limites en un point - aspect théorique

Exercice 7 ★ **Bien comprendre la définition –**

1. Écrire, à l'aide de quantificateurs, la proposition suivante : f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$, avec $\ell > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, $f(x) > 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [209]

Exercice 8 ★ **Une fonction lipschitzienne est continue –**

Soit I un intervalle, $k > 0$ et $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Démontrer que f est continue sur I.

Indication ▼ Correction ▼ [3206]

Exercice 9 ★★ **Valeur absolue –**

Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0. Démontrer que la réciproque est fausse.

Indication ▼ Correction ▼ [210]

Exercice 10 ★★★ **Inf et sup –**

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ sont continues.

Indication ▼ Correction ▼ [211]

Exercice 11 ★★★ **Fonction périodique ayant une limite en $+\infty$ –**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Indication ▼ Correction ▼ [212]

Exercice 12 ★★★★ **Plus petite période –**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que

$f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour tout $0 < \tau < T$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x+\tau) \neq f(x)$.

On pose

$$A = \{\tau > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $T > 0$.
3. Démontrer que T est une période pour f.

Indication ▼ Correction ▼ [3057]

3 Prolongements d'identité et équations fonctionnelles

Exercice 13 ★★ Prolongement d'identités –

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

1. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) < g(x)$.

Montrer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on n'a pas nécessairement une inégalité stricte dans la question précédente.

2. Montrer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que l'on n'a pas nécessairement une inégalité stricte dans la question précédente.

4. On suppose désormais que, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ avec $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Montrer que f est strictement croissante.

Indication ▼ Correction ▼ [202]

Exercice 14 ★★ Équation fonctionnelle –

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0, et vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x. Montrer que f est constante. Comment généraliser ce résultat si f vérifie $f(ax+b) = f(x)$ pour des réels a et b donnés avec $|a| \neq 1$?

Indication ▼ Correction ▼ [203]

Exercice 15 ★★ Équation fonctionnelle –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$.
2. Démontrer que f est impaire.
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
5. Démontrer que pour tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$$

(on pourra écrire $p = q \times \frac{p}{q}$).

6. Conclure qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Indication ▼ Correction ▼ [204]

Exercice 16 ★★★ Une équation fonctionnelle –

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) - f(x) = x$.

1. Soit f une telle fonction. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$f(x) - f(x/2^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}.$$

2. Répondre au problème posé.

Indication ▼ Correction ▼ [3207]

4 Théorème des valeurs intermédiaires - aspect pratique

Exercice 17 ★ Combien de solutions ? –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Indication ▼ Correction ▼ [3205]

Exercice 18 ★ Racines –

Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement d'amplitude inférieur à 10^{-1} de chacune de ces racines.

Indication ▼ Correction ▼ [223]

Exercice 19 ★★★ Une équation –

On considère l'équation (E_a), d'inconnue $x > 0$,

$$\ln(x) = ax.$$

1. Démontrer que si $a \leq 0$, l'équation (E_a) admet une unique solution et que cette solution appartient à $]0,1]$.
2. Démontrer que si $a \in]0,1/e[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions.
3. Démontrer que si $a = 1/e$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on précisera la valeur.
4. Démontrer que si $a > 1/e$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.

Indication ▼ Correction ▼ [3184]

Exercice 20 ★ Une infinité de solutions –

Démontrer que l'équation $\cos x = \frac{1}{x}$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

Indication ▼ Correction ▼ [2864]

Exercice 21 ★ Application à l'étude de fonctions –

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, avec $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution α. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

Calculer $f'(x)$ puis exprimer le en fonction de g, pour $x \in]-1;+\infty[$.

5. En déduire le signe de f', puis les variations de f sur $]-1;+\infty[$.

Indication ▼ Correction ▼ [2880]

Exercice 22 ★★★★ Le cycliste –

Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Démontrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes tel que le cycliste a parcouru 5 km. Existe-t-il toujours un intervalle de temps de 40 minutes durant lequel il aura parcouru 20km ?

Indication ▼ Correction ▼ [221]

Exercice 23 ★★ Non continue et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires –

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0.

2. On souhaite prouver que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous réels $a < b$, et pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $y = f(c)$.
Traiter le cas $a > 0$. Si $a = 0$, justifier l'existence de $d \in]a,b[$ tel que $f(d) = f(0)$. Conclure.

3. Traiter le cas $a > 0$.

4. Si $a = 0$, justifier l'existence de $d \in]a,b[$ tel que $f(d) = f(0)$. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [233]

5 Théorème des valeurs intermédiaires - aspect théorique

Exercice 24 ★ Polynôme de degré impair –

Démontrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Indication ▼ Correction ▼ [3208]

Exercice 25 ★★ Carré égal à 1 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)^2 = 1$. Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Indication ▼ Correction ▼ [220]

Exercice 26 ★ Nombre fini de valeurs –

Que dire d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle, continue, et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

Indication ▼ Correction ▼ [224]

Exercice 27 ★ Barycentre –

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p,q deux réels strictement positifs. Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Indication ▼ Correction ▼ [227]

Exercice 28 ★★ Point fixe –

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet toujours au moins un point fixe.

Indication ▼ Correction ▼ [225]

Exercice 29 ★★★ Une suite définie implicitement –

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction strictement croissante sur $[a,b[$ et vérifiant $f(a) \leq 0$, $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in [a,b[$.

2. Étudier la monotonie de la suite (x_n).

3. Étudier la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite éventuelle.

Indication ▼ Correction ▼ [2691]

Exercice 30 ★★★ Fonctions qui commutent –

Soit $f,g:[0,1]\to[0,1]$ deux fonctions continues telles que $g\circ f=f\circ g$. On veut démontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c)=g(c)$. On rappelle que f admet un point fixe $s\in[0,1]$. On définit par récurrence une suite (u_n) par $u_0=s$ et $u_{n+1}=g(u_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $n\geq 0$, u_n est un point fixe de f.
2. On suppose que la suite (u_n) est monotone. Démontrer le résultat.
3. On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.
Démontrer qu'il existe $u,v\in[0,1]$ tels que $(f-g)(u)\cdot(f-g)(v)\leq 0$. Conclure.
4. Démontrer qu'il existe $u,v\in[0,1]$ tels que $(f-g)(u)\cdot(f-g)(v)\leq 0$.
5. Conclure.

Indication ▼ Correction ▼ [3059]

Exercice 31 ★★★★ **Une drôle de propriété !** –

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On suppose que f vérifie la propriété suivante : pour tous les points $c<d$ de l'intervalle, il existe e compris entre c et d tel que $f(e)=f(a)$ ou $f(e)=f(b)$. Montrer que f est constante.

Indication ▼ Correction ▼ [232]

Exercice 32 ★★★ **Point fixe** –

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l<1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Indication ▼ Correction ▼ [226]

Exercice 33 ★★★★ **Mêmes limites donc non injective !** –

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty}f=\lim_{+\infty}f$. Démontrer que f n'est pas injective.

Indication ▼ Correction ▼ [3209]

Exercice 34 ★★★★ **Valeurs intermédiaires ?** –

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telle que $f(0)=f(1)$.

1. Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, il existe $c_n\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ tel que
$$f(c_n)=f\left(c_n+\frac{1}{n}\right).$$
2. Montrer que si l'on remplace $1/n$ par un réel $\alpha\in]0,1[$ tel que $1/\alpha$ n'est pas un entier, le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$$f(x)=\cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right)-x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)-1\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [234]

Exercice 35 ★★★★ **Tout intervalle dans l'image est l'image d'un intervalle !** –

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\alpha<\beta$ des réels avec $\alpha,\beta\in f(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $a<b$ tel que $f([a,b])=[\alpha,\beta]$.

Indication ▼ Correction ▼ [3058]

6 Théorème des bornes atteintes

Exercice 36 ★ –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^4 + 3x^2)e^{-x^2}$.
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, en $-\infty$.
2. Démontrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a $|f(x)| \leq 1$.
3. Démontrer qu'il existe un réel $B < 0$ tel que, pour tout $x \leq B$, on a $|f(x)| \leq 1$.
4. Démontrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [2868]

Exercice 37 ★★ Inégalités strictes –

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.
1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq g(x) + \delta$ pour tout $x \in [a,b]$.
2. On suppose de plus que $g(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f(x) \geq kg(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.
3. Les résultats restent-ils vrais si on remplace le segment $[a,b]$ par $\mathbb{R}$?

Indication ▼ Correction ▼ [229]

Exercice 38 ★★★ Avec une limite en l'infini –

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue admettant une limite (finie) en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.

Indication ▼ Correction ▼ [228]

Exercice 39 ★★★ Minimum –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼ [231]

Exercice 40 ★★★★ Infinité d'antécédents –

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.
1. Démontrer que 0 admet un nombre infini d'antécédents.
2. Plus généralement, démontrer que tout réel admet un nombre infini d'antécédents.

Indication ▼ Correction ▼ [2604]

Exercice 41 ★★★★ Le maximum d'une fonction est continue –

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On peut donc définir, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \max_{t \in [0,x]} f(t)$. Démontrer que la fonction F est continue.

Indication ▼ Correction ▼ [2879]

7 Fonctions continues injectives - fonctions réciproques

Exercice 42 ★ Fonction réciproque et parité –

Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire. Que dire pour une fonction paire ?

Indication ▼ Correction ▼ [235]

Exercice 43 ★★★★ Symétrie par rapport à la première bissectrice –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice du repère.
1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(f(x)) = x$.
2. Démontrer que si $\mathbf{C}$ n'est pas la première bissectrice du repère, alors f n'est pas croissante.

3. En déduire, si on suppose de plus que f est continue, qu'elle est strictement décroissante.

4. Donner un exemple de fonction non décroissante dont la courbe représentative **C** est symétrique par rapport à la première bissectrice (sans être celle-ci).

Indication ▼ Correction ▼ [236]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Utiliser les techniques usuelles : mise en facteur du terme dominant, utilisation des limites classiques et des comparaisons entre logarithmes et exponentielles...

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

C'est facile si on encadre $\lfloor 1/x \rfloor$ par la définition de la partie entière.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Indication pour l'exercice 5 ▲

Pour f et h, considérer deux suites (u_n) et (v_n) tendant vers 0 et telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ n'ont pas la même limite.

Indication pour l'exercice 6 ▲

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

1.
2. Appliquer la définition avec $\varepsilon = \ell/2$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Revenir à la définition. Si on a fixé x_0 et $\varepsilon > 0$, le réel $\eta = \varepsilon/k$ pourrait être d'un grand secours...

Indication pour l'exercice 9 ▲

Appliquer la définition de la continuité.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Fixer un $x_0 \in \mathbb{R}$ et partager l'étude en 3 cas, suivant la position de $f(x_0)$ par rapport à $g(x_0)$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Fixer $x_0 \in \mathbb{R}$ et considérer $f(x_0 + nT)$, où T est une période de f.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1.
2. Raisonner par l'absurde et utiliser que f n'est pas constante et est continue.
3.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Prendre $g = 0$ et $f > 0$, sauf en un point irrationnel.
2. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Prendre $g = 0$ et $f > 0$, sauf en un point irrationnel.
4. Intercaler des rationnels entre deux nombres quelconques.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Démontrer que $f(x) = f(x/2^n)$.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Procéder par récurrence.
2. Raisonner par analyse synthèse. On pourra faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente en utilisant la somme d'une suite géométrique.

Indication pour l'exercice 17 ▲

Commencer par étudier la fonction, et ensuite s'aider du tableau de variations pour faire la discussion.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Calculer $f(0)$, $f(1)$ avec $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$, puis appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication pour l'exercice 19 ▲

Il faut étudier la fonction $f(x) = \ln(x) - ax$....

Indication pour l'exercice 20 ▲

Considérer $f(x) = \cos x - \frac{1}{x}$ et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires dans des intervalles bien choisis. Il faudra bien sûr utiliser la 2π-périodicité de $\cos x$.

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Dériver g.
2. S'appuyer sur le tableau de variations et sur le théorème des valeurs intermédiaires.
3.
4.
5.

Indication pour l'exercice 22 ▲

Soit f la fonction qui représente la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps. Quelle propriété veut-on prouver sur f ?

Indication pour l'exercice 23 ▲

Pour démontrer qu'elle n'est pas continue, utiliser des suites. Pour la question 2, se ramener à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle où la fonction est continue.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Théorème des valeurs intermédiaires !

Indication pour l'exercice 25 ▲

Ce n'est pas complètement évident, il faut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires en procédant par l'absurde.

Indication pour l'exercice 26 ▲

Montrer qu'elle est constante en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Se ramener au théorème des valeurs intermédiaires.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g(x) = f(x) - x$.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Théorème des valeurs intermédiaires.
2. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$.
3. Démontrer que (x_n) converge. Que se passe-t-il si sa limite est différente de b ?

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. Procéder par récurrence.
2. La suite (u_n) est convergente.
3. Si une suite n'est pas monotone, il existe $n \neq m$ tels que $(u_n - u_{n+1})(u_m - u_{m+1}) \leq 0$.
4. Si une suite n'est pas monotone, il existe $n \neq m$ tels que $(u_n - u_{n+1})(u_m - u_{m+1}) \leq 0$.
5.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Remarquer que f ne peut prendre que deux valeurs.

Indication pour l'exercice 32 ▲

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Procéder par l'absurde en supposant que f est injective. Considérer $c < d$ tel que $f(c) < f(d)$. Démontrer que pour tout $x \geq d$, $f(x) \geq f(d)$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. On pourra considérer la fonction f_n définie sur $[0, 1 - 1/n]$ par

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

2.

Indication pour l'exercice 35 ▲

Indication pour l'exercice 36 ▲

1. Faire le changement de variables $u = x^2$.
2. Appliquer la définition de la limite.
3. Appliquer la définition de la limite.
4. Utiliser que f est continue sur le segment $[B, A]$.

Indication pour l'exercice 37 ▲

Tout dépend du théorème suivant : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. On appliquera le théorème à

1. $f-g$;
2. f/g.

Indication pour l'exercice 38 ▲

Découper $[0,+\infty[$ en deux : une partie $[A,+\infty[$ où f est bornée car f admet une limite en $+\infty$, et $[0,A]$ où f est bornée (pourquoi ?)

Indication pour l'exercice 39 ▲

Les ingrédients sont la définition des limites en $\pm\infty$ et le fait qu'une fonction continue sur un segment y admet un minimum.

Indication pour l'exercice 40 ▲

1. Raisonner par l'absurde. Considérer le plus grand des antécédents, notons le A, et étudier $f([0,A])$ et $f(]A,+\infty[)$.
2. Se ramener au cas précédent.

Indication pour l'exercice 41 ▲

Démontrer la continuité en x_0 en séparant le cas où $F(x_0)=f(x_0)$ du cas où $F(x_0)>f(x_0)$. Dans ce dernier cas, on pourra montrer que F est constante au voisinage de x_0.

Indication pour l'exercice 42 ▲

Utiliser les définitions.

Indication pour l'exercice 43 ▲

1. Quel est le symétrique de $(x,f(x))$? Il appartient à $\mathbb{C}$ donc...
2. Raisonner par l'absurde.
3. Utiliser le fait que f est injective.
4.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On écrit, pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\left(1 - \frac{2}{1+x}\right) = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}.$$

On a levé l'indéterminée, et la limite recherchée vaut donc $-1/2$.

2. L'astuce est de remarquer que $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ pour pouvoir simplifier numérateur et dénominateur. On trouve donc

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

et la limite recherchée vaut donc 1/2.

3. On met en facteur le terme dominant au numérateur (x^3) et au dénominateur ($5x^3$). Après simplification, on trouve :

$$\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8} = \frac{1}{5} \times \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{7}{5x}+\frac{8}{5x^3}}$$

est la limite recherchée est $1/5$.

4. On utilise la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+2x}-x = \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{x\sqrt{1+2/x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1}.$$

La limite recherchée est égale à 2/2=1.

5. On utilise le changement de variables $u = x^2$. Il vient

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2} = \lim_{u\to+\infty} u^{5/2}e^{-u}.$$

Par comparaison de la fonction exponentielle et des fonctions puissance, cette limite vaut 0.

6. On met en facteur le terme dominant :

$$\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

Mais on a

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. De même, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1.$$

7. On met de même en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x\ln x+7}{x^2+4} = \frac{x\ln x\left(1+\frac{7}{x\ln x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1+\frac{7}{x\ln x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Or, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+7}{x^2+4} = 0.$$

8. On va majorer et conclure par le théorème des gendarmes : pour $x > 0$,

$$\left|\frac{4\sin^2 x+3\cos(5x)}{x}\right| \leq \frac{4\sin^2 x+3|\cos(5x)|}{x} \leq \frac{7}{x}.$$

Par majoration, la limite recherchée est 0.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On factorise par le terme dominant au numérateur et au dénominateur, et on trouve

$$\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{3x}}{e^x}\times\frac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}=e^{2x}\times\frac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}.$$

Par comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on a $\lim_{+\infty}xe^{-3x}=0$ et donc la fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. On va multiplier par la quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur. On trouve

$$\frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1+x-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\times\left(\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}=\frac{-1}{4\left(\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}.$$

On en déduit que la limite recherchée vaut $-\frac{1}{8}$.

3. On met en facteur le terme dominant et on trouve, pour $x>0$ (attention au calcul au numérateur !)

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

On a levé la forme indéterminée, et la limite recherchée vaut donc 1.

4. On a une forme indéterminée du type $0/0$. On la lève en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}=\frac{2x^2+5x+9-9}{x\left(\sqrt{2x^2+5x+9}+3\right)}=\frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x+9}+3}.$$

La limite recherchée est donc $5/6$.

5. On utilise (bien sûr !) la quantité conjuguée, qui donne

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}.$$

En mettant en facteur $\sqrt{x}$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1}.$$

La forme n'est plus indéterminée, et la limite recherchée est $1/2$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Par définition de la partie entière, on sait que

$$\frac{1}{x}-1<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leq\frac{1}{x}.$$

L'inégalité de gauche suffit, par comparaison, à dire que $\lim_{0^+}f=+\infty$. Si on multiplie maintenant les inégalités par $x>0$, on trouve

$$1-x\leq g(x)\leq 1,$$

ce qui prouve, toujours par le théorème d'encadrement, que $\lim_{0^+}g=1$. Enfin, puisque $h=xg$, on trouve aussi que $\lim_{0^+}h=0$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Si $x \to 0$, alors $-1/x^2 \to -\infty$. Puisque $\lim_{X\to-\infty} \exp(X) = 0$, on en déduit par le théorème de composition des limites que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. Si $x \to 0^+$, le même raisonnement s'appliquer et $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Mais si $x \to 0^-$, alors $-1/x \to +\infty$. Puisque $\lim_{X\to+\infty} \exp(X) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$. Ainsi, on ne peut pas prolonger g par continuité en 0.

3. Par les théorèmes généraux, h est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par ailleurs, posant $u = x+1$, on a

$$\lim_{x\to-1} h(x) = \lim_{u\to 0} \sin(u)\ln|u| = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \times u\ln|u| = 1\times 0 = 0.$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité h en -1 en posant $h(-1) = 0$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. C'est un grand classique ! Observez le tracé de la fonction pour comprendre qu'il est impossible de la prolonger par continuité en 0.

En effet, aussi près que l'on veut de 0, la fonction va prendre les valeurs 0, 1 et -1. Précisément, on va considérer les deux suites

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } v_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}.$$

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Cependant,

$$f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0$$

tandis que

$$f(v_n) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1.$$

Ainsi, $(f(u_n))$ converge vers 0 et $(f(v_n))$ converge vers 1. f n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas prolongeable par continuité en ce point.

2. Par les théorèmes généraux, g est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on a

$$|g(x)| \leq |\sin x||\sin(1/x)| \leq |x| \times 1 \leq |x|.$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. On peut donc prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$. Ici, la discontinuité de $\sin(1/x)$ en 0 est "mangée" par le facteur $\sin(x)$.

3. En remplaçant sin par cos, le procédé précédent ne fonctionne plus puisque $\cos(0) \neq 0$. On va prouver qu'on ne peut pas prolonger h par continuité en 0. Pour cela, on considère les deux suites

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } v_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}.$$

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Cependant,

$$h(u_n) = \cos(u_n)\cos(2n\pi) = \cos(u_n) \to 1$$

tandis que

$$h(v_n) = \cos(v_n)\cos(2n\pi + \pi/2) = 0.$$

Ainsi, $(h(u_n))$ converge vers 1 et $(h(v_n))$ converge vers 0 : h n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas prolongeable par continuité en ce point.

Correction de l'exercice 6 ▲

Puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver pour chaque $a \in \mathbb{R}$ une suite (u_n) de $\mathbb{Q}$ et une suite (v_n) de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ telles que $u_n \to a$ et $v_n \to a$. Mais, pour chaque n, on a $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$. Les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne convergent pas vers la même limite alors que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers a. Ainsi, f n'est pas continue en a.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A,\ f(x) \leq M$.
2. On va appliquer la définition de limite avec $\varepsilon = \ell/2$. Il existe donc $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a

$$|f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}.$$

On en déduit que

$$-\frac{\ell}{2} \leq f(x) - \ell \leq \frac{\ell}{2}$$

ce qui implique

$$f(x) \geq \frac{\ell}{2} > 0.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

On va prouver la continuité de f en revenant à la définition. Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \varepsilon/k$ et soit $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$. Alors

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| \leq k\eta = \varepsilon.$$

C'est bien que f est continue en x_0. Remarquons que η ne dépend pas de x_0. En réalité, on a démontré un petit peu plus que la continuité de f sur I : on a démontré sa continuité uniforme.

Correction de l'exercice 9 ▲

On va vérifier par la définition que $|f|$ est continue en x_0. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Mais, par l'inégalité triangulaire,

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, $|f|$ est continue en x_0. On aurait pu aussi utiliser que $|f| = |\cdot| \circ f$, et utiliser le fait que la composée de deux fonctions continues est continue. La réciproque est fausse. Considérons par exemple f définie par $f(x) = -1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Alors f n'est pas continue en 0. En revanche, $|f| = 1$ est une fonction constante, et donc $|f|$ est continue.

Correction de l'exercice 10 ▲

Il y (au moins) deux façons de résoudre cet exercice. La première est d'utiliser un marteau. On a en effet

$$\inf(f,g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \text{ et } \sup(f,g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

Puisque f, g et $|.|$ sont trois fonctions continues, il en est de même de $\inf(f,g)$ et de $\sup(f,g)$. On peut aussi procéder à la main (c'est plus instructif). Pour simplifier les notations, on pose $h = \inf(f,g)$. On $x_0 \in \mathbb{R}$ et on va prouver que h est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. On distingue 3 cas :

1. Si $f(x_0) < g(x_0)$, on pose $\delta = \inf(\varepsilon, (g(x_0) - f(x_0))/2)$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta.$$

Puisque g est continue en x_0, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta_2 \implies |g(x) - g(x_0)| < \delta.$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. On a donc, pour $|x - x_0| < \eta$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \text{ et } |g(x) - g(x_0)| < \delta.$$

En particulier, pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, on a

$$f(x) \leq f(x_0) + \delta \leq g(x_0) - \delta \leq g(x).$$

Ainsi, $h(x) = f(x)$, et

$$|h(x) - h(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \delta \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que h est continue en x_0.

2. Si $f(x_0) > g(x_0)$, on effectue le même raisonnement en échangeant les rôles joués par f et g.

3. Si $g(x_0) = f(x_0)$, alors c'est presque plus simple. On sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|x - x_0| < \eta$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ et } |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

soit,

$$|f(x) - h(x_0)| < \varepsilon \text{ et } |g(x) - h(x_0)| < \varepsilon.$$

Puisqu'on a toujours $h(x) = f(x)$ ou $h(x) = g(x)$, on trouve

$$|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de h.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $T > 0$ une période de f et $x_0 \in \mathbb{R}$. La suite $(x_0 + nT)$ tend vers $+\infty$. Puisque f admet une limite l en $+\infty$, la suite $(f(x_0 + nT))$ tend vers l. Or, par T-périodicité, on sait que

$$f(x_0 + nT) = f(x_0) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Par passage à la limite, on obtient $f(x_0) = l$ et donc la fonction f est constante égale à l.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque f est périodique) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure.

2. Soit $x \neq y$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Soit $\varepsilon = |f(y) - f(x)| > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|y - z| < \delta$ entraîne $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Supposons que $T = 0$. Alors il existe $\tau \in A$ tel que $0 < \tau < \delta$. Mais alors, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + n\tau \leq y < x + (n+1)\tau$, et donc $|y - (x + n\tau)| < \delta$. On en déduit que

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x + n\tau)| < \varepsilon = |f(y) - f(x)|,$$

une contradiction. On a donc $T > 0$.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et soit (τ_k) une suite d'éléments de A qui converge vers T. Puisque $f(x + \tau_k) = f(x)$, la continuité de f en $x + T$ entraîne que $f(x + T) = f(x)$. Ainsi, T est bien une période de f, et par construction, c'est la plus petite période de f.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de rationnels (u_n) qui converge vers x. Le passage à la limite dans $f(u_n) < g(u_n)$ donne $f(x) \leq g(x)$. Prenons $f = 0$ et $g(x) = |x - \sqrt{2}|$. Alors $g(x) > 0 = f(x)$ pour tout $x \neq \sqrt{2}$, en particulier pour tout $x \in \mathbb{Q}$, et pourtant $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de rationnels (u_n) qui converge vers x. Le passage à la limite dans $f(u_n) < g(u_n)$ donne $f(x) \leq g(x)$.

3. Prenons $f = 0$ et $g(x) = |x - \sqrt{2}|$. Alors $g(x) > 0 = f(x)$ pour tout $x \neq \sqrt{2}$, en particulier pour tout $x \in \mathbb{Q}$, et pourtant $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = 0$.

4. Soient $x < y$. On peut trouver des rationnels a et b tels que $x < a < b < y$. Soit ensuite une suite de rationnels (x_n) qui converge vers x et (y_n) une suite de rationnels qui converge vers y. Pour n assez grand, on a $x_n \leq a$, donc $f(x_n) \leq f(a)$ et par passage à la limite $f(x) \leq f(a)$. De même, on a $f(b) \leq f(y)$. On obtient l'inégalité stricte en écrivant

$$f(x) \leq f(a) < f(b) \leq f(y),$$

qui est vraie car $a<b$ et a,b sont deux rationnels.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$ et (x_n) la suite définie par $x_n=x/2^n$. Alors $x_n=2x_{n+1}$, et donc on a $f(x_n)=f(x_{n+1})$. Ainsi, on obtient que pour tout entier n, on a $f(x_n)=f(x)$. Or, la suite (x_n) tend vers 0, et f est continue en 0. On en déduit que $f(x_n)\to f(0)$, et donc que $f(x)=f(0)$. Comme x est arbitraire, f est bien constante égale à $f(0)$. Si f vérifie la relation $f(ax+b)=f(x)$, alors soit l la solution de $al+b=l$, soit $l=\frac{b}{1-a}$ (on a $a\neq 1$). Si f est continue en l, alors f va être constante. En effet, la transformation $x\mapsto ax+b$ est une homothétie de centre l et de rapport a. On peut faire le même travail avec cette homothétie qu'avec l'homothétie $x\mapsto 2x$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. On a $f(0)=0$. Ceci découle de $f(0)=f(0+0)=2f(0)\implies f(0)=0$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On applique la propriété vérifiée par f à x et à $y=-x$. Utilisant que $f(0)=0$, on trouve
$$0=f(x)+f(-x)\implies f(-x)=-f(x).$$
3. On remarque d'abord que $f(2x)=2f(x)$, puis, par récurrence sur n, que $f(nx)=nf(x)$. En effet, si la propriété est vraie au rang n, alors on a
$$f\big((n+1)x\big)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=(n+1)f(x).$$
4. Soit n est un entier négatif. Alors $-n$ est un entier positif et donc
$$f(-nx)=-nf(x).$$
Puisque f est impaire,
$$f(nx)=-f(-nx)=nf(x).$$
5. Soit maintenant $r=p/q$ un rationnel. Pour calculer $f(rx)$, l'astuce est d'écrire
$$f\left(q\times\frac{p}{q}x\right)=qf\left(\frac{p}{q}x\right)$$
d'une part et
$$f\left(q\times\frac{p}{q}x\right)=f(px)=pf(x)$$
d'autre part. De la sorte, on a $f(rx)=rf(x)$.
6. Posons $a=f(1)$. Alors on vient de prouver que $f(x)=xf(1)$ pour tout $x\in\mathbb{Q}$. Soit $x\in\mathbb{R}$ et (x_n) une suite de rationnels tendant vers x. Le passage à la limite dans $f(x_n)=x_nf(1)$ (licite car f est continue) donne $f(x)=xf(1)$. Comme une telle fonction vérifie l'équation fonctionnelle, on vient de prouver que les fonctions continues vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions linéaires.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. On va procéder par récurrence. Pour $n\geq 1$ et $x\in\mathbb{R}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété
$$\mathscr{P}(n)=\text{"}f(x)-f(x/2^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^k}\text{"}.$$
Initialisation : la propriété est vraie pour $n=1$. En effet, il s'agit de la propriété vérifiée par f mais appliquée en $x/2$. Hérédité : soit $n\geq 1$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et prouvons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Alors, appliquant la propriété vérifiée par f avec $x/2^n$, on a
$$f(x/2^n)-f(x/2^{n+1})=\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Or, on sait que

$$f(x)-f(x/2^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^k}.$$

En effectuant la somme de ces deux égalités, on trouve

$$f(x)-f(x/2^{n+1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^k}+\frac{x}{2^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x}{2^k}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 1$. On peut aussi éviter la récurrence en procédant par télescopage. En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $n\geq 1$ et pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, on a

$$f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{x}{2^k}.$$

On somme ensuite cette égalité pour k allant de 1 à n, et le terme de gauche se simplifie par télescopage.

2. On va procéder par analyse-synthèse. Soit f une fonction vérifiant cette propriété. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\geq 1$, on a

$$f(x)-f(x/2^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^k}=x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=x\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=x\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

On fait alors tendre n vers $+\infty$. D'une part, puisque f est continue en 0 et que $x/2^n\to 0$ si $n\to+\infty$, on sait que $f(x/2^n)$ tend vers $f(0)$. D'autre part, $1-\frac{1}{2^n}\to 1$ si x tend vers 0. On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(x)-f(0)=x.$$

Ainsi, si f est solution, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=x+a$. Réciproquement, on vérifie très facilement qu'une fonction f définie par $f(x)=x+a$, avec $a\in\mathbb{R}$, est solution du problème.

Correction de l'exercice 17 ▲

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

On peut alors amorcer la discussion suivant les valeurs de a :

Si $a>-1$, puisque $f(x)\leq -1$ si $x\in]-\infty,2]$, il n'y a pas de solutions à l'équation $f(x)=a$ dans cet intervalle. D'autre part, f est continue strictement croissante sur $]2,+\infty[$, et $a\in]f(2),\lim_{+\infty}f[=]-5,+\infty[$. Il y a donc une solution unique dans l'intervalle $]2,+\infty[$ à l'équation $f(x)=a$, et donc aussi une solution unique sur $\mathbb{R}$. Si $a=-1$, on fait le même raisonnement, en remarquant qu'il n'y a pas de solutions dans $]-\infty,0[$ ni dans $]0,2[$. En revanche, on a aussi $f(0)=-1$. L'équation $f(x)=-1$ admet donc 2 solutions. Si $a\in]-5,-1[$, alors par le même argument que précédemment (stricte monotonie et valeur ou limite aux bornes), on constate que l'équation $f(x)=a$ admet une solution unique sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,2[$ et $]2,+\infty[$. Il y a donc trois solutions à l'équation $f(x)=a$ sur $\mathbb{R}$. Si $a<-5$, alors il ne peut pas y avoir de solutions dans l'intervalle $[0,+\infty[$ et puisque f est strictement croissante, continue sur $]-\infty,0[$ avec $\lim_{-\infty}f=-\infty$ et $f(0)=-1$, l'équation $f(x)=a$ admet une solution unique dans $]-\infty,0[$. Enfin, si $a=-5$, on trouve deux solutions, l'une dans $]-\infty,0[$, et aussi 2.

Correction de l'exercice 18 ▲

Posons $f(x)=x^3+x^2-4x+1$. Remarquons que $f(0)=1>0$ et que $f(1)=-1<0$. De plus, $\lim_{-\infty}f=-\infty$ et $\lim_{+\infty}f=+\infty$. On va donc appliquer trois fois le théorème des valeurs intermédiaires :

On a $0\in f(]-\infty,0[)$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue f, il existe $x_1\in]-\infty,0[$ tel que $f(x_1)=0$. On a $0\in f(]0,1[)$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f, il existe $x_2\in]0,1[$ tel que $f(x_2)=0$. On a $0\in f(]1,+\infty[)$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f, il existe $x_3\in]1,+\infty[$ tel que $f(x_3)=0$.

Puisque $x_1<0<x_2<1<x_3$, on a bien trouvé trois racines distinctes à l'équation. En fait, comme on a affaire à un polynôme de degré 3, il ne peut pas avoir plus de 3 racines, et on a trouvé toutes ses racines. On va

maintenant encadrer ces racines. Pour cela on va utiliser la méthode de dichotomie. Commençons par x_2, dont on sait déjà qu'elle est comprise entre 0 et 1. On calcule successivement les valeurs suivantes

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ 0,5 & -0,625 \\ 0,25 & 0,078125 \\ 0,375 & -0,306640625 \\ 0,3125 & -0,121826172 \end{array}.$$

On en déduit que $0,25 < x_2 < 0,3125$. Pour x_3, on commence par remarquer que $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 5$. x_3 est donc localisé dans l'intervalle $[1,2]$. La méthode de dichotomie donne cette fois :

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ 1,5 & 0,625 \\ 1,25 & -0,484375 \\ 1,375 & -0,009765625 \\ 1,4375 & 0,286865234 \end{array}.$$

On en déduit que $1,375 < x_3 < 1,4375$. Maintenant, pour x_1, il faut d'abord tatonner un encadrement grossier. On a $f(-2) = 5 > 0 > f(-3) = -5$. On applique donc la méthode de dichotomie entre -2 et -3. On trouve

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ -2,5 & 1,625 \\ -2,75 & -1,234375 \\ -2,625 & 0,302734375 \\ -2,6875 & -0,438232422 \end{array}$$

On en déduit que $-2,6875 < x_1 < -2,625$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Dans toute la suite, on va poser $f(x) = \ln(x) - ax$, définie pour $x > 0$. Chercher une solution de (E_a), c'est chercher un zéro de f. Remarquons d'abord que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. De plus, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a.$$

On a $f'(x) = 0 \iff x = 1/a$. Si $a \leq 0$, la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Si $a > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $]0,1/a[$ et strictement décroissante sur $]1/a,+\infty[$.

1. Si $a \leq 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et de plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée). La fonction f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$. On peut même préciser l'emplacement de ce zéro. En effet, $f(1) = -a \geq 0$, et donc $0 \in]\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)]$. On en déduit que la solution à (E_a) est dans l'intervalle $]0,1]$.

2. Si $a > 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ par croissance comparée de la fonction logarithme et des fonctions puissance. On a donc le tableau de variations suivant pour la fonction f :

Supposons maintenant $a \in]0,1/e[$. Par continuité et stricte monotonie, f réalise une bijection de $]0,1/a]$ sur $]-\infty, f(1/a)] =]-\infty, \ln(1/a)-1]$ et de $[1/a,+\infty[$ sur $]-\infty; \ln(1/a)-1]$. Puisque $a < 1/e$, $\ln(1/a) > 1$ et on trouve bien deux solutions à l'équation $f(x) = 0$: l'une dans l'intervalle $]0,1/a[$ et l'autre dans l'intervalle $]1/a,+\infty[$.

3. Si $a = 1/e$, alors f admet un maximum en e qui vaut 0. La fonction étant strictement croissante sur $]0,1/e[$ et strictement décroissante sur $]1/e,+\infty[$, l'équation (E_a) admet pour unique solution e.

4. Si $a > 1/e$, alors f admet un maximum en $1/a$ et $f(1/a) = -\ln(a) - 1 < 0$. Ainsi, l'équation (E_a) n'admet pas de solutions.

Correction de l'exercice 20 ▲

Posons, pour $x>0$, $f(x)=\cos x-\frac{1}{x}$. Alors f est continue sur $]0,+\infty[$. Soit $k\geq 1$ un entier. Alors on a

$$f(2k\pi)=1-\frac{1}{2k\pi}\geq 0$$

alors que

$$f(2k\pi+\pi)=-1-\frac{1}{2k\pi+\pi}\leq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x_k dans l'intervalle $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ tel que $f(x_k)=0$. On a clairement $x_k<2(k+1)\pi\leq x_{k+1}$. Ainsi, les réels x_k sont deux à deux disjoints et l'équation admet une infinité de solutions.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. On calcule la dérivée de g. On trouve $g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$. Ainsi, on a $g'(x)<0$ sur $]0;1[$ et $g'(x)>0$ sur $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$. On sait aussi que

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}2x^3=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour g :

2. La fonction g est croissante sur $]-\infty;0]$ et donc pour tout $x\in]-\infty;0]$, on a $g(x)\leq g(0)=-1$. La fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$ et donc pour tout $x\in[0;1]$, on a $g(x)\leq g(0)=-1$. Enfin, la fonction g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Puisque $g(1)=-2$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et que $0\in[-2;+\infty[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$. Comme elle n'a pas de solutions dans $]-\infty;-2]$, c'est la seule solution dans $\mathbb{R}$ tout entier. Notons la α. Du fait que $g(2)=3>0$ alors que $g(1)<0$, on sait que $\alpha\in[1;2]$. On en trouve une valeur approchée par exemple par balayage. On trouve $\alpha\simeq 1{,}7$, à 10^{-1} près.

3. D'après l'étude précédente (et le tableau de variations), on a $g(x)\leq 0$ si $x\leq\alpha$ et $g(x)\geq 0$ si $x\geq\alpha$.

4. Remarquons d'abord que le dénominateur s'annule uniquement en -1. La fonction f est bien définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et sa dérivée vérifie

$$f'(x)=\frac{-(x^3+1)-(1-x)(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2}=\frac{g(x)}{(1+x^3)^2}.$$

5. Ainsi, f' est du même signe que g et f est décroissante sur $]-1;\alpha]$, puis croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

Correction de l'exercice 22 ▲

Notons f la fonction qui représente la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps (exprimé en minutes). f est une fonction continue, $f(0)=0$ et $f(60)=30$. On veut prouver qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes tel que le cycliste a parcouru 5 km. Autrement dit, on veut trouver x dans $[0,50]$ tel que $f(x+10)-f(x)=5$. Supposons qu'un tel x n'existe pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait alors que :

ou bien, pour tout $x\in[0,50]$, on a $f(x+10)-f(x)>5$. ou bien, pour tout $x\in[0,50]$, on a $f(x+10)-f(x)<5$.

Dans le premier cas, on a

$$\begin{aligned}f(60)&=f(60)-f(50)+f(50)-f(40)+f(40)-f(30)+f(30)-f(20)+f(20)-f(10)+f(10)-f(0)\\&>6\times 5\\&>30.\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Dans le second cas, on trouverait $f(60)<30$, ce qui constitue également une contradiction. L'hypothèse formulée est donc fausse : il existe $x\in[0,50]$ tel que $f(x+10)-f(x)=5$. Dans un intervalle de 40 minutes, cela devient faux. Supposons par exemple que le cycliste parcourt 15 kms pendant les 10 premières minutes, se repose pendant 40 minutes, puis parcourt les 15 derniers kilomètres pendant les 10 dernières minutes. Alors, si on prend un intervalle de temps de 40 minutes :

ou bien il contient une partie des 10 premières minutes, mais alors il ne comprend aucune partie des 10 dernières minutes, et dans ce cas la distance parcourue est inférieure à 15km. ou bien il contient une partie des 10 dernières minutes, mais alors il ne comprend aucune partie des 10 premières minutes, et dans ce cas la distance parcourue est inférieure à 15km. ou bien c'est l'intervalle "central", et dans ce cas la distance parcourue est nulle.

Dans tous les cas, on ne peut pas trouver d'intervalle de temps de 40 minutes durant lequel il aura parcouru 20km.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Pour prouver que f n'est pas continue en 0, il suffit de trouver une suite (u_n) qui converge vers 0, mais telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(0)=0$. Ici, $u_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ convient, puisque $f(u_n)=1$ pour tout entier n. Question bonus : si on n'avait pas posé $f(0)=0$, sauriez-vous prouver que f ne peut pas se prolonger par continuité en 0 ?

2. Si $a\neq 0$, on peut directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f qui est continue sur $[a,b]$. Si $a=0$, soit $n\geq 1$ tel que $\frac{1}{n\pi}<b$. Posons $d=1/n\pi$. Alors $f(d)=0=f(0)$, et cette fois on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[d,b]$ pour démontrer que toute valeurs comprise entre $0=f(a)=f(d)$ et $f(b)$ est prise par f.

3. Si $a\neq 0$, on peut directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f qui est continue sur $[a,b]$.

4. Si $a=0$, soit $n\geq 1$ tel que $\frac{1}{n\pi}<b$. Posons $d=1/n\pi$. Alors $f(d)=0=f(0)$, et cette fois on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[d,b]$ pour démontrer que toute valeurs comprise entre $0=f(a)=f(d)$ et $f(b)$ est prise par f.

Correction de l'exercice 24 ▲

Soit f un tel polynôme. Alors f est une fonction continue. De plus, écrivons $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$. Alors si $a_n>0$, on a $\lim_{-\infty}f=-\infty$ et $\lim_{+\infty}f=+\infty$. Si $a_n<0$, alors $\lim_{-\infty}f=+\infty$ et $\lim_{+\infty}f=-\infty$. Dans tous les cas, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure que l'équation $f(x)=0$ admet toujours au moins une solution.

Correction de l'exercice 25 ▲

Ce que donne immédiatement l'énoncé est

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1 \text{ ou } f(x)=-1.$$

On veut prouver que

$$(\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1)\ \text{ ou } (\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-1).$$

Ce n'est pas la même chose : pensons à la fonction identiquement égale à -1 sur $]-\infty,0]$ et égale à 1 sur $[0,+\infty[$. Supposons donc que la deuxième propriété est fausse. Il existe donc $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=1$ et il existe $x_1\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_1)=-1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe y tel que $f(y)=0$. Ceci contredit que $(f(y))^2=1$. Donc la deuxième propriété est vraie.

Correction de l'exercice 26 ▲

On va démontrer qu'elle est constante en faisant un raisonnement par l'absurde et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons en effet qu'il existe $a<b$ dans I tel que $f(a)\neq f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur de $[f(a),f(b)]$ (ou $[f(b),f(a)]$ si $f(b)<f(a)$) est prise par f dans $[a,b]$. Comme cet intervalle contient un nombre infini de points, on obtient une contradiction. Donc, pour tous $a,b\in I$, on a $f(a)=f(b)$. Autrement dit, f est constante.

Correction de l'exercice 27 ▲

Le réel $\frac{p}{p+q}f(a)+\frac{q}{p+q}f(b)$ est clairement un réel de l'intervalle $[f(a),f(b)]$ (ou $[f(b),f(a)]$ si $f(b)<f(a)$), puisqu'il s'écrit $\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$, avec $\lambda\in[0,1]$ qui est égal à $\frac{p}{p+q}$. Puisque la fonction f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $c\in[a,b]$ tel que

$$f(c)=\frac{p}{p+q}f(a)+\frac{q}{p+q}f(b).$$

Multipliant par $p+q$, c'est exactement le résultat voulu.

Correction de l'exercice 28 ▲

Posons $g(x) = f(x) - x$. g est une fonction continue. Puisque $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$, on a $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$. En particulier, $f(c) = c$.

Correction de l'exercice 29 ▲

1. L'existence d'une solution vient du théorème des valeurs intermédiaires appliquée à la fonction continue f sur l'intervalle $[a,b[$, l'unicité vient de la stricte croissance de f.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$. Puisque f est croissante, ceci entraîne que $x_n \leq x_{n+1}$, et donc que (x_n) est croissante.

3. La suite (x_n) est croissante, et majorée par b. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite, $\ell \in [a,b]$. Si $\ell < b$, alors puisque (x_n) est croissante, on a pour tout entier n, $x_n \leq \ell$. Puisque f est croissante, on a de plus $n = f(x_n) \leq f(\ell)$. Ceci est une contradiction (le membre de gauche tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$). On en déduit que $\ell = b$.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. On va procéder par récurrence sur n. Pour $n \geq 0$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété "$f(u_n) = u_n$". Initialisation : Par définition, $u_0 = s$ est un point fixe de f, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Alors on a

$$f(u_{n+1}) = f \circ g(u_n) = g \circ f(u_n) = g(u_n) = u_{n+1}.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2. La suite (u_n) est convergente, puisqu'elle est monotone et bornée. Notons c sa limite. Alors on a, par continuité de g en c, $g(c) = c$. De plus, on sait que $f(u_n) = u_n$. Puisque f est continue en c, on a $f(c) = c = g(c)$.

3. Puisque la suite (u_n) n'est pas monotone, il existe deux entiers distincts n et m tels que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $u_{m+1} - u_m \geq 0$. On en déduit que

$$(u_n - u_{n+1})(u_m - u_{m+1}) \leq 0.$$

Mais,

$$u_n - u_{n+1} = f(u_n) - g(u_n) = (f-g)(u_n)$$

et

$$u_m - u_{m+1} = f(u_m) - g(u_m) = (f-g)(u_m).$$

On en déduit le résultat en posant $u = u_n$ et $v = u_m$. Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f-g$ entre u et v pour en déduire qu'elle s'annule en $c \in [0,1]$, c'est-à-dire que $f(c) = g(c)$.

4. Puisque la suite (u_n) n'est pas monotone, il existe deux entiers distincts n et m tels que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $u_{m+1} - u_m \geq 0$. On en déduit que

$$(u_n - u_{n+1})(u_m - u_{m+1}) \leq 0.$$

Mais,

$$u_n - u_{n+1} = f(u_n) - g(u_n) = (f-g)(u_n)$$

et

$$u_m - u_{m+1} = f(u_m) - g(u_m) = (f-g)(u_m).$$

On en déduit le résultat en posant $u = u_n$ et $v = u_m$.

5. Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f-g$ entre u et v pour en déduire qu'elle s'annule en $c \in [0,1]$, c'est-à-dire que $f(c) = g(c)$.

Correction de l'exercice 31 ▲

Soit c un réel quelconque intervalle de l'intervalle $]a,b[$. Soit d_n une suite de l'intervalle qui tend vers c par valeur supérieure. D'après l'hypothèse, il existe $c \leq e_n \leq d_n$ tel que $f(e_n) = f(a)$ ou $f(e_n) = f(b)$. Maintenant, par le théorème des gendarmes, on constate que e_n tend vers c, et par continuité de f en c, $f(e_n)$ tend vers $f(c)$. Ainsi, on a obligatoirement $f(c) = f(a)$ ou $f(c) = f(b)$. Ainsi, f ne peut prendre que deux valeurs : $f(a)$ et $f(b)$. Or, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, une fonction continue qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs est constante. Donc f est constante.

Correction de l'exercice 32 ▲

On distingue deux cas. D'une part, si $f(0) = 0$, alors 0 est un point fixe de f. Dans le cas où $f(0) \neq 0$, posons $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. g est définie, continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{0^+} g = +\infty$. D'autre part, $\lim_{+\infty} g = l < 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $g(a) = 1$. Mais alors, on a $f(a) = a$ et a est un point fixe de f.

Correction de l'exercice 33 ▲

Supposons par l'absurde que f est injective. Soit $c < d$. Alors $f(c) \neq f(d)$. Pour fixer les idées, on va supposer que $f(c) < f(d)$. Alors

d'une part, pour tout $x > d$, on a $f(x) \geq f(d)$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $x_0 > d$ avec $f(x_0) < f(d)$. Considérons y tel que $y > \max(f(c), f(x_0))$ et $y < f(d)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué entre d et x_0, il existe $x_1 \in]d, x_0[$ tel que $y = f(x_1)$. De même, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f entre c et d, il existe $x_2 \in]c,d[$ tel que $f(x_2) = y$. Mais alors $x_1 < d < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Ceci contredit que f est injective. d'autre part, pour tout $x < c$, on a $f(x) \leq f(c)$, en utilisant un raisonnement tout à fait similaire.

Mais alors, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq f(d)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) \leq f(c)$. Puisque $f(c) < f(d)$, ceci contredit que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f$. L'hypothèse de départ était donc fausse, et f n'est pas injective.

Correction de l'exercice 34 ▲

1. On considère la fonction f_n définie sur $[0, 1-1/n]$ par

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x).$$

On écrit alors que

$$0 = f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Le point clé est de remarquer que tous les $f_n(k/n)$ ne peuvent pas être tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. Mais alors, on peut trouver un entier k dans $\{0,\dots,n-2\}$ tel que $f_n(k/n) \leq 0$ et $f_n((k+1)/n) \geq 0$, ou bien $f_n(k/n) \geq 0$ et $f_n((k+1)/n) \leq 0$ (seriez-vous capable de démontrer cela formellement ?). Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f_n entre les points k/n et $(k+1)/n$.

2. C'est nettement plus facile, car on nous donne la fonction. On remarque d'abord que $f(0) = f(1) = 1$. Par ailleurs, s'il existait $x \in [0, 1-\alpha]$ avec $f(x) = f(x+\alpha)$, on obtiendrait après simplifications :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = 1.$$

Ceci n'est pas possible si $1/\alpha$ n'est pas un entier.

Correction de l'exercice 35 ▲

On commence par considérer c et d des réels tels que $f(c) = \alpha$ et $f(d) = \beta$. On peut supposer $c < d$. Posons

$$A = \{x \leq d : \ f(x) \leq \alpha\}$$
$$B = \{x \geq a : \ f(x) \geq \beta\}.$$

Alors A est non vide (il contient c), majorée (par d), donc il possède une borne supérieure que nous allons noter a. De plus, il existe une suite (x_n) d'éléments de A tels que (x_n) converge vers a. Puisque $f(x_n) \leq \alpha$, on en déduit par continuité de f en a que $f(a) \leq \alpha$. De la même façon, B admet une borne inférieure, notée b, qui vérifie $f(b) \geq \beta$ et $a \leq b$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que $[\alpha,\beta] \subset f([a,b])$. Le choix spécifique de a et de b va nous prouver l'inclusion réciproque. En effet, si $x \in]a,d]$, alors $f(x) > \alpha$. De même, si $x \in [c,b[$, $f(x) < \beta$. Ainsi, si $x \in]a,b[$, on a $f(x) \in]\alpha,\beta[$. Par passage à la limite (mais en approchant cette fois a par valeur supérieure), on a enfin $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$, ce qui achève de prouver l'inclusion réciproque.

Correction de l'exercice 36 ▲

1. Posons $u = x^2$. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, u tend vers $+\infty$. De plus, on a alors $f(x) = u^2e^{-u} + 3ue^{-u}$. Par croissance comparée, on sait que $\lim_{u\to+\infty} u^2e^{-u} = 0$ et que $\lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$, et donc par composition des limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

2. Il s'agit ici simplement d'écrire la définition de la limite en $+\infty$, appliquée pour $\varepsilon = 1$.
3. Il s'agit ici simplement d'écrire la définition de la limite en $-\infty$, appliquée pour $\varepsilon = 1$.
4. On sait que f est continue. Ainsi, f est bornée sur le segment $[B,A]$: il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [B,A]$. En posant C le maximum de 1 et de M, on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq C$ et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. En réalité, cette méthode prouve le résultat général suivant : si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$, alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 37 ▲

Tout dépend du théorème suivant : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

1. Soit $h = f - g$. Alors h est continue et strictement positive sur $[a,b]$. Il existe un point $c \in [a,b]$ tel que $h(c) \leq h(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Mais alors, $h(c) > 0$ et

$$f(x) - g(x) \geq h(c)$$

pour tout $x \in [a,b]$. On obtient le résultat avec $\delta = h(c)$.

2. On reprend le même raisonnement avec $h = f/g$. Alors h est continue sur $[a,b]$ et $h(x) > 1$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $c \in [a,b]$ tel que

$$h(c) \leq h(x)$$

pour tout $x \in [a,b]$. Alors $h(c) > 1$ et $\frac{f(x)}{g(x)} \geq h(c)$ pour tout $x \in [a,b]$. On obtient le résultat en posant $k = h(c)$.

3. Non ! Par exemple, pour le premier cas, il suffit de considérer une fonction strictement positive qui admet une limite nulle en $+\infty$, par exemple $\exp(-x)$.

Correction de l'exercice 38 ▲

Soit $a = \lim_{+\infty} f$. Appliquons la définition de la limite pour $\varepsilon = 1$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a $|f(x) - a| \leq 1$. En particulier, pour $x \in [A,+\infty[$, on a $|f(x)| \leq |a| + 1$. De plus, f est continue sur le segment $[0,A]$. Elle y est bornée. Soit M_0 tel que $|f(x)| \leq M_0$ pour tout $x \in [0,A]$. Alors, en posant $M = \max(M_0, |a| + 1)$, on a $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 39 ▲

Le résultat qui va nous fournir l'existence du minimum est le fait que toute fonction continue sur un segment y admet un minimum. C'est le fait que f admet des limites en $\pm\infty$ valant $+\infty$ qui va nous permettre de nous ramener à un segment. Pour cela, on commence par traduire avec des quantificateurs les propriétés $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M_1 > 0,\ \forall x \geq M_1,\ f(x) \geq A.$$

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M_2 < 0,\ \forall x \leq M_2,\ f(x) \geq A.$$

On espère alors appliquer le théorème précédent dans l'intervalle $[M_2,M_1]$. Il y a encore deux problèmes à régler, qui ne sont pas indépendants. Il reste alors à donner une valeur à A qui assure que le minimum de f est bien atteint dans $[M_2,M_1]$. Choisissons par exemple $A = f(0)$. Pour cette valeur de A, la définition de la limite donne des réels M_1 et M_2. La fonction f est continue sur $[M_2,M_1]$. Il existe donc $x_0 \in [M_2,M_1]$ tel que, pour tout $x \in [M_2,M_1]$, on a $f(x) \geq f(x_0)$. En particulier, $0 \in [M_2,M_1]$ et donc $f(0) \geq f(x_0)$. D'autre part, si $x > M_1$ ou si $x < M_2$, on a $f(x) \geq A = f(0) \geq f(x_0)$. Ainsi, f atteint bien son minimum sur $\mathbb{R}$ en x_0.

Correction de l'exercice 40 ▲

1. On raisonne par l'absurde et on suppose que 0 admet un nombre fini d'antécédents. Notons A le plus grand de ces antécédents. Alors 0 n'est pas dans l'image de $]A,+\infty[$ par f. Par le théorème des valeurs intermédiaires, ceci entraine que $f(]A,+\infty[) \subset]0,+\infty[$ ou $f(]A,+\infty[) \subset]-\infty,0[$. Supposons par exemple que $f(]A,+\infty[) \subset]0,+\infty[$. On sait aussi d'autre part que l'image du segment $[0,A]$ par f est un segment $[m,M]$. Mais ainsi, on a prouvé que $f(\mathbb{R}_+) \subset [m,M] \cup]0,+\infty[$. Cet ensemble ne peut pas être égal à $\mathbb{R}$ (on ne s'approche jamais de $-\infty$) et donc ceci contredit que f est surjective.

2. Fixons $y \in \mathbb{R}$. On se ramène à la question précédente en posant $g(x) = f(x) - y$ qui reste surjective.

Correction de l'exercice 41 ▲

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. On va supposer que $x_0 > 0$ mais le cas $x_0 = 0$ se traiterait de la même façon. Soit aussi $\varepsilon > 0$. On va montrer que F est continue en x_0 en séparant deux cas :

1. soit $F(x_0) = f(x_0)$ (autrement dit, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0,x_0]$ en x_0). Alors, par continuité de f en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$.

si $x < x_0$, alors on a $F(x) \leq F(x_0)$ et aussi

$$F(x) \geq f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \geq F(x_0) - \varepsilon.$$

si $x \geq x_0$, alors on a $F(x) \geq F(x_0)$. De plus, si $y \in [0,x_0]$, on a $f(y) \leq F(x_0)$ et si $y \in [x_0,x] \subset [x_0,x_0+\eta]$, on a

$$f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon = F(x_0) + \varepsilon.$$

On en déduit que

$$F(x) = \sup_{y \in [0,x]} f(y) \leq F(x_0) + \varepsilon.$$

Dans les deux cas, on a démontré que

$$F(x_0) - \varepsilon \leq F(x) \leq F(x_0) + \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de F en x_0.

2. si $x < x_0$, alors on a $F(x) \leq F(x_0)$ et aussi

$$F(x) \geq f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \geq F(x_0) - \varepsilon.$$

3. si $x \geq x_0$, alors on a $F(x) \geq F(x_0)$. De plus, si $y \in [0,x_0]$, on a $f(y) \leq F(x_0)$ et si $y \in [x_0,x] \subset [x_0,x_0+\eta]$, on a

$$f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon = F(x_0) + \varepsilon.$$

On en déduit que

$$F(x) = \sup_{y \in [0,x]} f(y) \leq F(x_0) + \varepsilon.$$

4. soit $f(x_0) < F(x_0)$. Alors on pose $\delta = F(x_0) - f(x_0)$. La continuité de f en x_0 nous donne l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \delta.$$

Remarquons que, pour tout $y \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, on a

$$f(y) \leq f(x_0) + \delta \leq F(x_0).$$

En particulier, on a $F(x_0) = f(x_1)$ pour $x_1 \in [0, x_0 - \eta]$, et on obtient que, pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$F(x) = F(x_0).$$

Ceci achève la preuve de la continuité de F.

Correction de l'exercice 42 ▲

Soit $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Alors, $f(-x) = -y$, et donc

$$f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y).$$

C'est bien que f^{-1} est impaire. En revanche, une fonction paire n'est jamais bijective (car elle n'est pas injective).

Correction de l'exercice 43 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Du fait que **C** est symétrique par rapport à la première bissectrice, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(f(x), x) = (a, f(a))$. Mais alors, $f(f(x)) = f(a) = x$.

2. Supposons f croissante. Puisque la courbe représentative de f n'est pas la première bissectrice, il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $f(a) \neq a$. Si $f(a) > a$, alors $f \circ f(a) \geq f(a) > a$, ce qui contredit la question précédente. De même, si $f(a) < a$, alors $f \circ f(a) \leq f(a) < a$. L'hypothèse émise est donc absurde.

3. f est injective. En effet, si $f(a) = f(b)$, alors $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Mais une fonction injective continue est nécessairement strictement monotone. Comme d'après la question précédente f ne peut pas être croissante, elle est nécessairement strictement décroissante.

4. Bien sûr, il faut choisir une fonction qui n'est pas continue en 0. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, convient. Cette fonction, qui est décroissante sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$, n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.