Chapitre : Probabilités sur un univers fini

1 Exercices théoriques sur les espaces probabilisés

Exercice 1 Écriture ensembliste –

Soit Ω un univers et soient A,B,C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1. Seul A se réalise ;
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent ;
4. au moins l'un des trois événements se réalise ;
5. au moins deux des trois événements se réalisent ;
6. aucun ne se réalise ;
7. au plus l'un des trois se réalise ;
8. exactement deux des trois se réalisent ;

Indication ▼ Correction ▼ [1227]

Exercice 2 Sur la probabilité de l'intersection –

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Démontrer que

$$\max\big(0, P(A)+P(B)-1\big) \leq P(A\cap B) \leq \min\big(P(A),P(B)\big).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1229]

Exercice 3 Inégalité de Bonferroni –

Soient $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1,\dots,A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\right)-(n-1).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1230]

2 Calcul de probabilités par dénombrement

Exercice 4 Jeu de cartes –

On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs ?
2. que des as ?
3. deux coeurs et un pique ? On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Indication ▼ Correction ▼ [1224]

Exercice 5 Au moins un six ! –

Soit $n\geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois le chiffre 6 ?
2. au moins deux fois le chiffre 6 ?
3. au moins k fois le chiffre 6 ?

Indication ▼ Correction ▼ [1225]

Exercice 6 ★★★ **Racines de polynômes –**

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que :

Q ait deux racines réelles distinctes. Q ait une racine réelle double. Q n'ait pas de racines réelles.

Indication ▼ Correction ▼ [1221]

Exercice 7 ★★★ **Le problème des anniversaires –**

Vous êtes dans une classe de 30 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous 10 euros qu'au moins deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari ?

Indication ▼ Correction ▼ [1220]

Exercice 8 ★★★★ **La coupe –**

Pour organiser une coupe, on organise un tirage au sort qui réunit n équipes de basket-ball de 1ère division et n équipes de 2ième division, de sorte que chaque équipe joue un match, et un seul.

1. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2ème division.

2. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq \dbinom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.

4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim_{n\to\infty} q_n$.

Indication ▼ Correction ▼ [1219]

3 Probabilités non uniformes

Exercice 9 ★★ **Dés pipés –**

On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.

1. Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

3. Reprendre les questions si cette fois le dé est pipé de sorte que la probabilité d'obtenir une face paire soit le double de la probabilité d'obtenir une face impaire, les probabilités d'obtenir chaque face paire étant toutes égales entre elles.

Indication ▼ Correction ▼ [1222]

Exercice 10 ★★ **Déterminer une probabilité –**

Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1,\dots,n\}$ telle que la probabilité de $\{1,\dots,k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Indication ▼ Correction ▼ [1223]

4 Indépendance

Exercice 11 ★ **Indépendance et contexte –**

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements

$$A = \text{"tirage d'un nombre pair"},$$

$$B = \text{"tirage d'un multiple de 3"}.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Indication ▼ Correction ▼ [1234]

Exercice 12 ★ Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle –

Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événement suivants : A="les deux enfants sont de sexes différents" B="l'ainé est une fille" C="le cadet est un garçon".

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants. On suppose que la probabilité à la naissance d'avoir une fille (respectivement un garçon) est égale à $1/2$.

Indication ▼ Correction ▼ [1235]

Exercice 13 ★★ Probabilité d'une réunion et indépendance –

Soient $A_1,\dots,A_n$ n événements d'un espace probabilisé (Ω,P). On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = P(A_i)$. Donner une expression simple de $P(A_1\cup\dots\cup A_n)$ en fonction de $p_1,\dots,p_n$. Application : on suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité p d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ?

Indication ▼ Correction ▼ [1238]

Exercice 14 ★★★ Indépendance impossible –

On suppose qu'on a un espace probabilisé tel que l'univers Ω est un ensemble fini de cardinal un nombre premier p, et que le modèle choisi soit celui de l'équiprobabilité. Prouver que deux événements A et B non triviaux (différent de $\varnothing$ et Ω) ne peuvent pas être indépendants.

Indication ▼ Correction ▼ [1236]

Exercice 15 ★★★ Circuit électrique –

1. Soient A, B, C trois événements. Montrer que :

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit

si les composants sont disposés en série. si les composants sont disposés en parallèle. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

3. si les composants sont disposés en série.
4. si les composants sont disposés en parallèle.
5. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Indication ▼ Correction ▼ [1237]

Exercice 16 ★★★ Relecture –

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité 1/3. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Indication ▼ Correction ▼ [1239]

Exercice 17 ★★★ Jeu équitable ? –

Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in]0,1[$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in]0,1[$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
3. A quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Indication ▼ Correction ▼ [3142]

Exercice 18 ★★★ **Indépendance d'événements et cardinal de l'univers –**

Soit (Ω, P) un univers fini. On suppose qu'il existe n événements $A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants et pour lesquels $P(A_k) \in]0,1[$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

1. Soit $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec pour tout $k = 1, \dots, n$, $B_k = A_k$ ou $B_k = \overline{A_k}$. Démontrer que $B_1 \cap \dots \cap B_n \neq \varnothing$.
2. Soit $B_1, \dots, B_n, B'_1, \dots, B'_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec pour tout $k = 1, \dots, n$, $B_k, B'_k \in \{A_k, \overline{A_k}\}$. On suppose que $(B_1, \dots, B_n) \neq (B'_1, \dots, B'_n)$. Démontrer que $B_1 \cap \cdots B_n$ et $B'_1 \cap \cdots \cap B'_n$ sont disjoints.
3. En déduire que $\mathrm{card}(\Omega) \geq 2^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [3139]

Exercice 19 ★★★★ **Indicatrice d'Euler –**

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.
2. Pour tout entier naturel m qui divise n, calculer la probabilité de A_m.
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la probabilité de B.
5. Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1240]

---

5 Probabilités conditionnelles

Exercice 20 ★ **Clés USB –**

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :

60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse. 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : "la boite est abîmée" et par D l'événement "la boite achetée contient au moins une clé défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D.
2. Le client constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée ?

Indication ▼ Correction ▼ [1242]

Exercice 21 ★ **Tirages successifs dans une urne –**

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Indication ▼ Correction ▼ [1243]

Exercice 22 ★★★ **A partir de dénombrement –**

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?

2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Indication ▼ Correction ▼ [1244]

Exercice 23 ★★ **QCM –**

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Indication ▼ Correction ▼ [1245]

Exercice 24 ★★ **Dés pipés –**

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $1/2$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n pour que ce dé soit pipé. Interpréter le résultat.

Indication ▼ Correction ▼ [1246]

Exercice 25 ★★ **Compagnie d'assurance –**

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

2. Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Indication ▼ Correction ▼ [1248]

Exercice 26 ★★ **–**

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé le n-ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,3 ; mais si elle a fumé le n-ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,9. Pour $n \geq 0$, on note F_n l'événement "la personne fume le n-ième jour" et p_n la probabilité de F_n. En particulier on a $p_0 = 1$.

1. Démontrer que $p_{n+1} = -0{,}6p_n + 0{,}7$.

2. La personne va-t-elle s'arrêter de fumer ?

Indication ▼ Correction ▼ [3092]

Exercice 27 ★★ **Déplacement d'un pion sur un triangle –**

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ; pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n),\ c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer les limites respectives des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Interpréter le résultat.

Indication ▼ Correction ▼ [3091]

Exercice 28 ★★★ **La rumeur –**

Une information de type vrai/faux est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Indication ▼ Correction ▼ [1249]

Exercice 29 ★★★ **Tests de dépistage –**

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Indication ▼ Correction ▼ [1251]

Exercice 30 ★★★ **Menteur ! –**

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?

Indication ▼ Correction ▼ [1252]

Exercice 31 ★★★ **Machines à sous –**

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machines $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ qui sont réglées de la facon suivante :

la probabilité de gagner sur la machine $\mathscr{A}$ est de $\frac{1}{5}$; la probabilité de gagner sur la machine $\mathscr{B}$ est de $\frac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

il commence par choisir une machine au hasard; après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout $k \geq 1$ les événements suivants :

G_k : "Le joueur gagne la k-ième partie". A_k : "La k-ième partie se déroule sur la machine $\mathscr{A}$".

1. Écrire une fonction Python `jouer(n)` qui simule le déroulement de n parties et retourne la proportion de parties gagnées parmi ces n parties.

2. Determiner la probabilité de gagner la première partie.

3. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.

4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine $\mathscr{A}$?

5. Soit $k \geq 1$.

Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$. Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$. En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(G_k)$. Calculer S_n puis déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

6. Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$.

7. Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$.

8. En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k.

9. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(G_k)$. Calculer S_n puis déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [2208]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il y a en réalité quatre inégalités à prouver. Une seule n'est pas immédiate. Partir de

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Indication pour l'exercice 3 ▲

Procéder par récurrence sur n.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Compter le nombre de tirages possibles et le nombre de tirages total.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Étudier plutôt la probabilité de l'événement complémentaire.

Indication pour l'exercice 6 ▲

L'espace probabilisé à considérer est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$, muni de l'équiprobabilité. Il suffit ensuite de compter le nombre d'issues pour lesquelles $b^2 - 4ac > 0$, etc...

Indication pour l'exercice 7 ▲

Traduire le problème en terme d'application injective (ou plutôt non injective...).

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Commencer par calculer le nombre total de tirages au sort possibles. On pourra mettre un ordre sur les matchs pour distinguer les tirages au sort. Ensuite, compter les tirages au sort opposant des équipes différentes. Pour le premier match, il faut choisir 1 équipe parmi n équipes de 1ère division et 1 équipe parmi n équipe de 2ème division. Pour le second match, il suffit d'en choisir $n-1$,...
2. Le cas n impair est facile. Si $n = 2k$ est pair, commencer par choisir les k matchs qui opposent équipes de 1ère division entre elles, puis faire un dénombrement des tirages au sort à l'intérieur de chaque division.
3. Commencer par écrire que :

$$(2n)! = 2^n (2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1 \times n!.$$

4. Majorer p_n et q_n à l'aide de la formule précédente.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}(\{i\}) = \lambda \times i$. Le problème est de déterminer λ. Utiliser que la somme des probabilités doit faire 1.
2. Décomposer en événements élémentaires.
3. Cette fois, poser $\lambda = \mathbb{P}(\{1\})$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Poser $P(\{1,\dots,k\}) = \lambda k^2$. Que vaut $P(\{k\})$ en fonction de λ et k. Utiliser que $P(\{1,\dots,n\} = 1$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Écrire en termes d'ensembles les événements $A,\ B$ et $A \cap B$. Puis calculer les probabilités.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Calculer la probabilité de A, B, C, $A \cap B$,...

Indication pour l'exercice 13 ▲

Passer par le complémentaire.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Raisonner par l'absurde, calculer le cardinal de $A \cap B$ et utiliser le théorème de Gauss pour obtenir une contradiction.

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Appliquer trois fois la formule $P(F \cup G) = \ldots$.
2. On note F_i l'événement : "le circuit C_i fonctionne". Il faut calculer pour le premier cas $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$, pour le second $P(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$, et pour le troisième $P(F_1 \cap (F_2 \cup F_3))$.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Introduire A_i l'événement "l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée par le i-ème relecteur" et interpréter la question en termes de A_i.
2. Introduire B_j l'événement "l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture" et interpréter la question en termes de B_j.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Un seul déroulement correspond au match nul.
2. Écrire l'événement "A gagne" comme réunion d'événements.
3.

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Calculer la probabilité de l'intersection.
2. Si $B_k \neq B'_k$, que dire que $B_k \cap B'_k$?
3.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x.
2. Écrire quels sont tels les élements de A_m.
3. Utiliser un résultat d'arithmétique.
4.
5.

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Traduire les informations de l'énoncé, utiliser la formule des probabilités totales.
2. Utiliser la formule de Bayes.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Lire le titre de l'exercice.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Dénombrer !

2. Dénombrer les tirages tels que la première boule est noire, et appliquer la définition des probabilités conditionnelles.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Utiliser la formule de Bayes.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Formule de Bayes !

2.

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Appliquer la formule des probabilités totales.

2. Appliquer la formule de Bayes.

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Appliquer la formule des probabilités totales.

2. C'est une suite arithmético-géométrique.

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. Utiliser que $b_1 = c_1$ et $a_1 + b_1 + c_1 = 1$.

2. Appliquer la formule des probabilités totales.

3.

4.

5.

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Utiliser la formule des probabilités totales.

2. On a une suite arithmético-géométrique. Retirer la limite possible pour retrouver une suite géométrique.

Indication pour l'exercice 29 ▲

Calculer la probabilité qu'une personne est malade si elle a une réponse positive au test.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Introduire la proportion x de tricheurs dans la population, et donner, à l'aide du théorème de Bayes, une estimation de la probabilité qu'il soit un tricheur en fonction de x. Il faudra convenir de certaines probabilités de bon sens.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1.

2. Appliquer la formule des probabilités totales.

3. Faire un arbre.

4. Appliquer la formule de Bayes.

5. Appliquer la formule des probabilités totales. Il y a deux éventualités pour jouer sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie suivant ce qui se passe à la k-ième. Reconnaitre une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$. On résout $\ell = a\ell + b$ puis on étudie $v_n = u_n - \ell$. Somme d'une suite géométrique.

6. Appliquer la formule des probabilités totales.

7. Il y a deux éventualités pour jouer sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie suivant ce qui se passe à la k-ième.

8. Reconnaitre une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$. On résout $\ell = a\ell + b$ puis on étudie $v_n = u_n - \ell$.

9. Somme d'une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Seul A se réalise : $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;
2. A et B se réalisent, mais pas C : $(A\cap B)\backslash C=(A\cap B)\cap\bar{C}$;
3. les trois événements se réalisent : $A\cap B\cap C$;
4. au moins l'un des trois événements se réalise : $A\cup B\cup C$;
5. au moins deux des trois événements se réalisent : $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$; on pourrait être tenté de rajouter la réunion avec $A\cap B\cap C$, mais c'est inutile puisque $A\cap B\cap C$ est inclus dans $A\cap B$.
6. aucun ne se réalise : $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;
7. au plus l'un des trois se réalise : c'est le contraire de "au moins deux se réalisent", donc

$$\overline{(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)};$$

8. exactement deux des trois se réalisent : on peut le reformuler en "au moins deux se réalisent, mais pas trois", d'où

$$\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\big)\cap\overline{A\cap B\cap C}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Remarquons d'abord que $A\cap B\subset A$ et donc $P(A\cap B)\leq P(A)$. De même, $P(A\cap B)\leq P(B)$, ce qui prouve l'inégalité de droite. De plus, $P(A\cap B)\geq 0$ et aussi

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\implies P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

Mais $P(A\cup B)\leq 1$ et donc

$$P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1.$$

On a donc aussi obtenu l'inégalité de gauche.

Correction de l'exercice 3 ▲

On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B).$$

La propriété est vraie si $n=1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A=A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}$ et $B=A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A\cup B)\leq 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)\geq\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(A_i)-(n-2)+P(A_n)-1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Le nombre de tirages possible est $\binom{8}{3}$. Le nombre total de tirages est $\binom{32}{3}$. La probabilité recherchée est donc

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}}=\frac{8\times 7\times 6}{32\times 31\times 30}=\frac{7}{620}.$$

2. Le raisonnement est identique. On obtient

$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}}=\frac{4\times 3\times 2}{32\times 31\times 30}=\frac{1}{1240}.$$

3. Le nombre de tirages possibles est $\binom{8}{2}\times\binom{8}{1}$. La probabilité recherchée est donc

$$\frac{\binom{8}{2}\times\binom{8}{1}}{\binom{32}{3}}=\frac{28\times 8}{4960}=\frac{7}{155}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Dans chaque cas, on va plutôt étudier la probabilité d'obtenir l'événement complémentaire.

1. La probabilité de n'obtenir aucun 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. La probabilité d'obtenir au moins un six est donc $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

2. Soit A l'événement "obtenir au maximum une fois le chiffre 6". Alors A est la somme des événements disjoints A_0="ne jamais obtenir six" et A_1="obtenir exactement 1 fois le chiffre 6". On a $P(A)=P(A_0)+P(A_1)$. De plus, $P(A_0)$ a été calculé à la question précédente :

$$P(A_0)=\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Calculons désormais $P(A_1)$. On commence par choisir le lancer où on a obtenu le chiffre 6. Il y a $\binom{n}{1}=n$ tels choix. Ce lancer fixé, la suite de lancers a une probabilité valant $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ de se réaliser. On en déduit que

$$P(A_1)=\binom{n}{1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Finalement, la probabilité d'obtenir au moins deux fois le chiffre 6 vaut

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\binom{n}{1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

3. On généralise la méthode précédente. Notons A_j la probabilité d'obtenir exactement j fois le chiffre 6. La probabilité recherchée est

$$1-P(A_0)-P(A_1)-\cdots-P(A_{k-1}).$$

Mais, pour calculer $P(A_j)$ on détermine d'abord la place des j chiffres 6 : il y a $\binom{n}{j}$ tels choix. Ce choix fait, la suite de lancers a une probabilité égale à $\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}$ de se réaliser. On a donc

$$P(A_j)=\binom{n}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}.$$

On conclut finalement que la probabilité d'obtenir au moins k fois le chiffre 6 vaut

$$1-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

On associe à l'expérience aléatoire l'univers des possibles $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}^3$, muni de l'équiprobabilité. Ainsi, la probabilité d'un événement A vaut $\mathrm{card}(A)/6^3$. On s'intéresse d'abord à l'événement $A=\{(a,b,c)\in\Omega;\ b^2-4ac>0\}$. Il suffit de dénombrer A. On commence par établir un petit tableau avec les valeurs de $4ac$:

$c\backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	4	8	12	16	20	24
2	8	16	24	32	40	48
3	12	24	36	48	60	72
4	16	32	48	64	80	96
5	20	40	60	80	100	120
6	24	48	72	96	120	144

On calcule le cardinal de A en regardant dans le tableau le nombre de valeurs de a et c pour lesquelles $b^2 > 4ac$, pour les 6 valeurs que peut prendre b. On trouve :

$$\mathrm{card}(A) = 0+0+3+5+14+16 = 38.$$

On en déduit :

$$P(A) = \frac{38}{216} = \frac{19}{108}.$$

On note pareillement $B = \{(a,b,c) \in \Omega;\ b^2 - 4ac = 0\}$ et $C = \{(a,b,c) \in \Omega;\ b^2 - 4ac < 0\}$. Le même dénombrement prouve que :

$$P(B) = \frac{5}{216}.$$

On peut calculer $P(C)$ de la même façon, ou remarquer que les 3 événement A,B,C forment un système complet d'événements. On déduit alors :

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{173}{216}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

On va chercher la probabilité que deux personnes de la classe aient la même date d'anniversaire. Si elle est supérieure à 1/2, il ne faut pas accepter le pari. Il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement complémentaire. On va donc chercher la probabilité que deux personnes n'ont pas la même date d'anniversaire et, pour simplifier, on va oublier que certaines années comportent un 29 février. Formalisons un peu le problème. Pour que deux personnes n'aient pas la même date d'anniversaire, on doit fabriquer une injection de $\{1,\dots,30\}$ dans $\{1,\dots,365\}$. Il y a $365 \times 364 \times \cdots \times 336$ telles applications injectives. Il y a total de 365^{30} applications de $\{1,\dots,30\}$ dans $\{1,\dots,365\}$. La probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire vaut donc

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times 336}{365^{30}} = 1 - \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365} \simeq 1 - 0,293 \simeq 0,706$$

Refusez le pari !

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On va dénombrer les tirages au sort en tenant compte de l'ordre des matchs dans le tirage (c'est-à-dire que si l'on a 4 équipes A,B,C et D, les tirages (A-B,C-D) et (C-D,A-B) sont comptés comme deux tirages différents car ils n'ont pas le même premier match). On pourrait faire sans cette convention, on obtiendrait les mêmes résultats mais cela changerait un peu la façon de faire. Un tirage au sort se présente donc comme une $n-$liste de matchs, c'est-à-dire une $n-$liste de combinaisons 2 à 2 disjointes. Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir la première combinaison. Puis, cette combinaison choisie, il y a encore $\binom{2n-2}{2}$ façons de choisir la combinaison suivante. Et ainsi de suite... Ainsi, le nombre total de tirages au sort est :

$$\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \dots \binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Parmi ces tirages, comptons ceux qui ne font s'opposer que des équipes de division distinctes. Pour le premier match, il y a n façons de choisir l'équipe de première division, et n façons de choisir l'équipe de deuxième division, soit n^2 choix. Pour le second match, il reste à choisir parmi $n-1$ équipes, et donc on a $(n-1)^2$ choix. Finalement, on obtient :

$$p_n = \frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

2. D'abord, si n est impair, un tel tirage au sort est clairement impossible, et $q_n = 0$. On suppose donc que n est pair et s'écrit $2k$. On choisit d'abord les k matchs parmi $2k$ qui opposent les matchs de 1ère division entre eux : cela fait $\binom{2k}{k}$ choix. Une fois ce choix réalisé, il faut compter le nombre de tirages à l'intérieur entre

équipes de 1ère division. De la même façon que lorsqu'on a compté le nombre total de tirages au sort, on trouve $\frac{(2k)!}{2^k}$. De même pour les tirages au sort entre équipes de 2è division. On a donc :

$$q_{2k} = \frac{2^{2k}}{(4k)!} \times \binom{2k}{k} \times \left(\frac{(2k)!}{2^k}\right)^2 = \frac{\binom{2k}{k}}{\binom{4k}{2k}}.$$

3. Ecrivons que :

$$(2n)! = 2^n(2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1 \times n!.$$

On a donc :

$$\binom{2n}{n} = 2^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1}{n!}.$$

Maintenant, en utilisant l'encadrement $2n-k-1 \leq 2n-k \leq 2n-k+1$, on obtient

$$2^n \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \times 2}{n!} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^n \frac{2n(2n-2)\dots 4 \times 2}{n!}$$

qui donne finalement le résultat demandé.

4. On a donc :

$$0 \leq p_n \leq \frac{n}{2^{n-1}},$$

qui prouve que p_n tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. De même pour q_n...

Correction de l'exercice 9 ▲

1. L'univers le plus naturel à associer à l'expérience est $\{1,\dots,6\}$. Soit $\mathbb{P}$ la probabilité modélisant l'expérience aléatoire. L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}(\{i\}) = \lambda \times i$. Le problème est de déterminer λ. Pour cela, on remarque que

$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 1.$$

Mais,

$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 21\lambda.$$

On doit donc avoir $\lambda = \frac{1}{21}$.

2. On a

$$\mathbb{P}(\{\text{obtenir un chiffre pair}\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

3. L'univers est le même. Posons cette fois $\lambda = \mathbb{P}(\{1\})$. Alors on doit avoir

$$\mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = 2\lambda$$

et

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \lambda.$$

Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on doit avoir

$$3\lambda + 6\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{9}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(\{\text{obtenir un chiffre pair}\}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

L'énoncé nous dit que l'on cherche une probabilité P telle que $P(\{1,\dots,k\}) = \lambda k^2$. On a alors, pour $k = 1,\dots,n$,

$$P(\{k\}) = P(\{1,\dots,k\}) - P(\{1,\dots,k-1\}) = \lambda k^2 - \lambda(k-1)^2 = 2\lambda k - \lambda.$$

On va déterminer λ en remarquant que
$$P(\{1,\dots,n\}) = 1$$
ce qui entraîne
$$\lambda n^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{n^2}.$$
La probabilité est donc définie par
$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$
On vérifie aisément que réciproquement, cette probabilité vérifie que $P(\{1,\dots,k\})$ est proportionnelle à k^2.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. On a :
$$A = \{2,4,6,8,10,12\}$$
$$B = \{3,6,9,12\}$$
$$A\cap B = \{6,12\}.$$
On a donc $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A\cap B) = 1/6 = P(A)P(B)$. Les événements A et B sont indépendants.

2. Les événements A, B et $A\cap B$ s'écrivent encore exactement de la même façon. Mais cette fois, on a : $P(A) = 6/13$, $P(B) = 4/13$ et $P(A\cap B) = 2/13 \neq 24/169$. Les événements A et B ne sont pas indépendants. C'est conforme à l'intuition. Il n'y a plus la même répartition de boules paires et de boules impaires, et dans les multiples de 3 compris entre 1 et 13, la répartition des nombres pairs et impairs est restée inchangée.

Correction de l'exercice 12 ▲

Clairement, on a $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Les quatre possibilités pour les deux enfants, supposées équiprobables, sont (F,G), (F,F), (G,G), (G,F). On en déduit que $P(A) = \frac{1}{2}$. Ensuite $A\cap B$ correspond à (F,G) et donc $P(A\cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$. On en déduit que A et B sont indépendants. On prouve de la même façon que A et C sont indépendants, et que B et C sont indépendants. Enfin, $A\cap B\cap C = B\cap C$ et donc $P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$. Les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Correction de l'exercice 13 ▲

Si les événements $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, les événements complémentaires $\overline{A_1},\dots,\overline{A_n}$ le sont aussi. On en déduit que
$$\begin{aligned} P(A_1\cup\dots\cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_n}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i). \end{aligned}$$
Dans le cas particulier proposé, la probabilité d'avoir au moins un accident vaut donc $1-(1-p)^n$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Supposons qu'il existe A et B deux événements non triviaux indépendants. On note m le cardinal de A et n le cardinal de B. On a donc $P(A) = m/p$ et $P(B) = n/p$. Puisque A et B sont supposés indépendants, et toujours parce que le modèle adopté est celui de l'équiprobabilité, on a :
$$\mathrm{card}(A\cap B) = p\times P(A\cap B) = p\times P(A)\times P(B) = \frac{mn}{p}.$$
Puisque le cardinal est un entier, p divise le produit mn, et par le théorème de Gauss, il divise l'un des deux, disons n. D'autre part, puisque $n \leq p$, ceci n'est possible que si $n = 0$ ou $n = p$. Autrement dit, seulement si B est ou l'événement certain, ou l'événement impossible, c'est-à-dire un événement trivial.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. On procède en deux temps. D'une part :

$$P((A\cup B)\cup C) = P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C).$$

Mais,

$$P((A\cup B)\cap C) = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C),$$

et

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

On appelle aussi ceci la formule du crible de Poincaré, elle se généralise avec plusieurs événements par récurrence.

2. On note F_i l'événement : "le composant C_i fonctionne". Par hypothèse, les événements F_i sont mutuellement indépendants. Il faut calculer pour le premier cas $P(F_1\cap F_2\cap F_3)$ (le circuit formé par les trois composants disposés en série fonctionne si et seulement si les trois composants fonctionnent), pour le second $P(F_1\cup F_2\cup F_3)$ (le circuit formé par les trois composants disposés en parallèle fonctionne si et seulement si un des trois composants fonctionne), et pour le troisième $P(F_1\cap(F_2\cup F_3))$. On a :

Par indépendance des événements :

$$P(F_1\cap F_2\cap F_3) = p_1p_2p_3.$$

D'après la formule précédente, et par indépendance des événements :

$$P(F_1\cup F_2\cup F_3) = p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+p_1p_2p_3.$$

L'événement $F_2\cup F_3$ est indépendant de F_1. On a donc :

$$P(F_1\cap(F_2\cup F_3)) = P(F_1)P(F_2\cup F_3) = P(F_1)\big(P(F_2)+P(F_3)-P(F_2\cap F_3)\big)$$

soit

$$P(F_1\cap(F_2\cup F_3)) = p_1\,(p_2+p_3-p_2p_3)\,.$$

3. Par indépendance des événements :

$$P(F_1\cap F_2\cap F_3) = p_1p_2p_3.$$

4. D'après la formule précédente, et par indépendance des événements :

$$P(F_1\cup F_2\cup F_3) = p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+p_1p_2p_3.$$

5. L'événement $F_2\cup F_3$ est indépendant de F_1. On a donc :

$$P(F_1\cap(F_2\cup F_3)) = P(F_1)P(F_2\cup F_3) = P(F_1)\big(P(F_2)+P(F_3)-P(F_2\cap F_3)\big)$$

soit

$$P(F_1\cap(F_2\cup F_3)) = p_1\,(p_2+p_3-p_2p_3)\,.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Notons A_i l'événement "l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée par le i-ème relecteur". Alors on a $P(A_i) = 2/3$ et les événements A_i sont indépendants. On s'intéresse à la probabilité de l'événement $A_1\cap\cdots\cap A_n$ qui vaut donc

$$P(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{2}{3} = \frac{2^n}{3^n}.$$

2. Notons B_j l'événement "l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture". D'après la question précédente, on a $P(B_j) = 2^n/3^n$ pour $j = 1,\dots,4$. Le livre est entièrement corrigé après la n-ième relecture si l'événement $\bigcap_{j=1}^4 \overline{B_j}$ est réalisé. Les événements B_j étant indépendants, le livre est entièrement corrigé après n relectures avec une probabilité valant

$$\prod_{j=1}^{4}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right) = \left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^4.$$

Cette probabilité est supérieure à $0,9$ si et seulement si

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^4 \geq 0.9 &\iff \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1-(0.9)^{1/4}\\ &\iff n\ln(2/3) \leq \ln(1-0.9^{1/4})\\ &\iff n \geq \frac{\ln(1-0.9^{1/4})}{\ln(2/3)}\end{aligned}$$

et donc ceci fonctionne dès que $n \geq 10$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Notons A_k l'événement "A gagne la k-ième partie" et B_k l'événement "B gagne la k-ième partie". L'événement "ni A ni B ne gagne" est égal à $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n-1}}\cap\overline{B_{2n}}$. Ces événements étant indépendants, la probabilité recherchée vaut $(1-a)^n(1-b)^n$.

2. L'événement "A gagne" est égal à la réunion des événements suivants : A_1, $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap A_3$, $\dots$, $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{2n-2}}\cap A_{2n-1}$. Maintenant, on a

$$P(\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{2k-2}}\cap A_{2k-1}) = (1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a$$

et donc la probabilité que A gagne vaut

$$a\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^k(1-b)^k = a\times\frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{a+b-ab}.$$

On peut fait un calcul similaire ou utiliser le fait que

$$P(A\text{ gagne}) + P(B\text{ gagne}) + P(\text{match nul}) = 1$$

pour démontrer que

$$P(B\text{ gagne}) = b(1-a)\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^k(1-b)^k = b(1-a)\times\frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{a+b-ab}.$$

3. Le jeu est équilibré si et seulement si A et B ont la même probabilité de gagner, c'est-à-dire si et seulement si $a = b(1-a)$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Les événements $B_1,\dots,B_n$ étant indépendants, on a $P(B_1\cap\cdots\cap B_n) = \prod_{i=1}^n P(B_i) > 0$ puisque $P(B_i)\in\,]0,1[$. Ainsi, on a $B_1\cap\cdots\cap B_n \neq \varnothing$.

2. Soit k tel que $B_k \neq B_k'$. Alors on a nécéssairement $B_k\cap B_k' = \varnothing$. Et donc $(B_1\cap\cdots\cap B_n)\cap(B_1'\cap\cdots\cap B_n') = \varnothing$.

3. Pour chaque n-uplet $B = (B_1,\dots,B_n)$, il existe un élément $x_B \in B_1\cap\cdots\cap B_n$. Ces éléments x_B sont deux à deux différents d'après la question précédente, et comme il y a 2^n tels n-uplets, le cardinal de Ω est supérieur ou égal à 2^n.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. On sait que x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x. On a donc :

$$B = \overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_r}}.$$

2. Puisque qu'on est en situation d'équiprobabilité, il suffit de calculer le cardinal de A_m. Mais si $n = km$, alors les multiples de m qui sont inférieurs ou égaux à n sont m, $2m, \dots, km$. On a donc

$$P(A_m) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}.$$

3. Soit $i_1 < \cdots < i_m$ des entiers distincts choisis dans $\{1, \dots, r\}$. On doit prouver que

$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = P(A_{p_{i_1}} \cap \cdots \cap A_{p_{i_m}}).$$

Mais,

$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{p_{i_j}}.$$

D'autre part, puisque $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$ sont premiers entre eux deux à deux, un entier est multiple de $p_{i_1} \dots p_{i_m}$ si et seulement s'il est multiple de chaque p_{i_j}, $j = 1, \dots, m$. On en déduit que

$$A_{p_{i_1}} \cap \cdots \cap A_{p_{i_m}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$

soit

$$P(A_{p_{i_1}} \cap \cdots \cap A_{p_{i_m}}) = \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_m}},$$

ce qui prouve le résultat voulu.

4. Les événements $\overline{A_{p_1}}, \dots, \overline{A_{p_r}}$ sont également indépendants. On en déduit que

$$P(B) = \prod_{j=1}^{r} P(\overline{A_{p_j}}) = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

5. On sait aussi, par le modèle de l'équiprobabilité et puisque le cardinal de B est égal à $\phi(n)$, que

$$P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$$

ce qui, grâce à la question précédente, donne le résultat voulu.

Correction de l'exercice 20 ▲

---

1. L'énoncé donne directement $P(A) = 0,05$, d'où $P(\bar{A}) = 0,95$, $P(D|A) = 0,6$ et $P(\bar{D}|\bar{A}) = 0,98$. On en déduit :

$$P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 0,4$$

$$P(D|\bar{A}) = 1 - P(\bar{D}|\bar{A}) = 0,02.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(\bar{A})P(D|\bar{A}) = \frac{49}{1000}.$$

2. On obtient $P(A|D)$ grâce à la formule de Bayes :

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{30}{49}.$$

Correction de l'exercice 21 ▲

On note B_i (resp. N_i) l'événement : "La i-ème boule tirée est blanche (resp. noire)". On cherche à calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$, ce que l'on va faire en utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap B_2).$$

Chacune des probabilités qui apparaît est facile à calculer, car $P(B_1) = 4/7$, $P(B_2|B_1) = 3/6$ (il reste 6 boules dont 3 blanches) et $P(N_3|B_1 \cap B_2) = 3/5$. Finalement, on obtient $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{6}{35}$.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Distinguons les boules et ordonnons les tirages. Il y a $10 \times 9 \times 8$ tirages possibles. Calculons maintenant le nombre de tirages comprenant au moins une boule noire. Il y a deux possibilités :

Le tirage ne comporte qu'une seule boule noire. Il y a 3 façons de choisir la position de la boule noire (lors du premier tirage, du deuxième, etc...), 2 choix pour cette boule, et ensuite 8×7 choix pour les deux boules blanches. En tout, il y a donc $3 \times 2 \times 8 \times 7$ tirages correspondants. Le tirage comporte les deux boules noires. On choisit d'abord les deux tirages où on a pris les boules noires : on choisit 2 places parmi 3, soit $\binom{3}{2} = 3$. Ce choix fait, il y a 2 choix pour les boules noires, et 8 choix pour les boules blanches. Il y a donc en tout $3 \times 2 \times 8$ tels tirages.

Le nombre total de tirages est donc $6 \times 8 \times 8$ et si on note B l'événement "Au moins une boule noire figure dans le tirage", alors la probabilité de B est égale à

$$P(B) = \frac{6 \times 8 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{8}{15}.$$

Remarquons que, comme souvent dans ce type d'exercice, il est plus facile de déterminer la probabilité du complémentaire : en effet, $\overline{B}$ est l'événement "on ne tire que des boules blanches". Le nombre de tirages correspondant est $8 \times 7 \times 6$ et donc

$$P(\overline{B}) = \frac{8 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = \frac{7}{15}$$

ce qui est bien la valeur attendue (ouf) !

2. Le tirage ne comporte qu'une seule boule noire. Il y a 3 façons de choisir la position de la boule noire (lors du premier tirage, du deuxième, etc...), 2 choix pour cette boule, et ensuite 8×7 choix pour les deux boules blanches. En tout, il y a donc $3 \times 2 \times 8 \times 7$ tirages correspondants.

3. Le tirage comporte les deux boules noires. On choisit d'abord les deux tirages où on a pris les boules noires : on choisit 2 places parmi 3, soit $\binom{3}{2} = 3$. Ce choix fait, il y a 2 choix pour les boules noires, et 8 choix pour les boules blanches. Il y a donc en tout $3 \times 2 \times 8$ tels tirages.

4. Le dénombrement du nombre de tirages tels que la première boule soit noire est plus simple. Il y a exactement $2 \times 9 \times 8$ tirages. Si A est l'événement : "La première boule tirée est noire", alors

$$P(A) = \frac{2 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}.$$

On cherche $P(A|B)$. Par définition,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{8}$$

puisque $A \subset B$.

Correction de l'exercice 23 ▲

On note :

$$B = \{\text{L'étudiant donne la bonne réponse}\}$$

$$C = \{\text{L'étudiant connait la bonne réponse}\}.$$

On cherche $P_B(C) = P(C|B)$, et l'énoncé donne :

$$P(C) = p,\ P(B|C) = 1,\ P(B|\bar{C}) = \frac{1}{m}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(C)P(B|C) + P(\bar{C})P(B|\bar{C}) = \frac{(m-1)p+1}{m}.$$

D'après la formule de Bayes :

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}.$$

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Notons T l'événement : "le dé est pipé" et C l'événement "le lancer amène un 6". On cherche $P_C(T)$. On va calculer cette probabilité en utilisant la formule de Bayes. En effet, $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, avec $P(T) = 25/100 = 1/4$ et $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 3/4$. L'énoncé nous dit aussi que $P_T(C) = 1/2$ et bien sûr $P_{\bar{T}}(C) = 1/6$. La formule de Bayes donne alors

$$\begin{aligned} P_C(T) &= \frac{P(T)P_T(C)}{P_T(C)P(T) + P_{\bar{T}}(C)P(\bar{T})} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Introduisons les événements C_k définis par "le k-ième lancer amène un 6" et $D = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$. Nous cherchons $P_D(T)$ que l'on calcule toujours par la formule de Bayes. Il faut juste remarquer que maintenant, par indépendance des événements C_k, $P_T(D) = (1/2)^n$ et $P_{\bar{T}}(D) = (1/6)^n$. On trouve donc :

$$\begin{aligned} P_D(T) &= \frac{P(T)P_T(D)}{P_T(D)P(T) + P_{\bar{T}}(D)P(\bar{T})} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{6}\right)^n\times\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{1+3^{-n+1}}. \end{aligned}$$

En particulier, (p_n) tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, ce qui est conforme à l'intuition : plus n est grand, plus le dé est très certainement pipé.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. On note A l'événement "avoir un accident dans l'année". Comme les trois classes R_1, R_2 et R_3 réalisent une partition de la population. On peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|R_1)P(R_1) + P(A|R_2)P(R_2) + P(A|R_3)P(R_3) \\ &= 0,05\times 0,2 + 0,15\times 0,5 + 0,3\times 0,3 \\ &= 0,175. \end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité d'être dans R_1 sachant qu'on n'a pas eu d'accident, c'est-à-dire la probabilité $P(R_1|\overline{A})$. La formule de Bayes donne :

$$P(R_1|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|R_1)P(R_1)}{P(\overline{A})}.$$

La probabilité $P(\overline{A})$ se calcule par la formule $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, tandis que l'énoncé donne $P(\overline{A}|R_1) = 0,95$. On obtient finalement :

$$P(R_1|\overline{A}) = \frac{0,95\times 0,2}{1-P(A)} \simeq 0,23.$$

Correction de l'exercice 26 ▲

1. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F_{n+1}) = P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n}).$$

L'énoncé nous dit que

$$P_{F_n}(\overline{F_{n+1}}) = 0{,}9 \text{ et } P_{\overline{F_n}}(\overline{F_{n+1}}) = 0{,}3$$

d'ou

$$P_{F_n}(F_{n+1}) = 0{,}1 \text{ et } P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = 0{,}7.$$

On a donc

$$p_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}7(1-p_n) = -0{,}6p_n + 0{,}7.$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. L'équation $\ell = -0{,}6\ell + 0{,}7$ donne $\ell = 7/16$. La suite (q_n) définie par $q_n = p_n - \ell$ est une suite géométrique de raison $-0{,}6$, elle converge vers 0, et donc (p_n) tend vers $7/16$. La probabilité que la personne fume le n-ième jour tend vers $7/16$. Elle ne va pas s'arrêter de fumer !

Correction de l'exercice 27 ▲

1. Puisqu'en $n = 0$ le pion est en A, on a $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$. A l'étape $n = 1$, d'après les informations de l'énoncé, $a_1 = 1/2$, $b_1 = c_1$. Puisque $a_1 + b_1 + c_1 = 1$, on a $b_1 = c_1 = 1/4$.

2. Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n).$$

Comme à la question précédente, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = 1/4$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4$. On en déduit que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n.$$

En raisonnant de la même façon, ou par symétrie,

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

3. D'après la question précédente, la matrice

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.

4. On a $V_n = M^n V_0$, ce qui donne

$$\begin{cases} a_n &= \frac{4^n+2}{3\cdot 4^n} \\ b_n &= \frac{4^n-1}{3\cdot 4^n} \\ c_n &= \frac{4^n-1}{3\cdot 4^n}. \end{cases}$$

On remarque qu'on a bien $a_n + b_n + c_n = 1$.

5. Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent toutes les trois vers 1/3. Au bout d'un très grand nombre de déplacements, les probabilités que le pion soit sur chacun des 3 points sont presque égales.

Correction de l'exercice 28 ▲

1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte". D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1}) = P(I_{n+1}|I_n)P(I_n) + P(I_{n+1}|\overline{I_n})P(\overline{I_n}).$$

Mais, $P(I_{n+1}|I_n) = p$ (l'information doit être transmise correctement) et $P(I_{n+1}|\overline{I_n}) = 1-p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que

$$p_{n+1} = p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p).$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie

$$l = (2p-1) \times l + (1-p) \iff l = 1/2.$$

On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

3. On distingue alors trois cas :
Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n. Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n. Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers 1/2. On n'a plus de traces de l'information initiale !
4. Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n.
5. Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n.
6. Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers 1/2. On n'a plus de traces de l'information initiale !

Correction de l'exercice 29 ▲

Les chiffres donnés ont l'air excellent, mais ils donnent l'inverse de ce que l'on souhaite. Le problème est plutôt le suivant : si une personne a une réponse positive au test, est-elle malade ? C'est la formule de Bayes qui permet de remonter le chemin. Précisément, on note M l'événement "La personne est malade", et T l'événement "le test est positif". Les données dont on dispose sont $P(M) = 10^{-4}$, $P(T|M) = 0{,}99$ et $P(T|\bar{M}) = 0{,}001$. On cherche $P(M|T)$. La formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned} P(M|T) &= \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})} \\ &= \frac{10^{-4} \times 0,99}{10^{-4} \times 0,99 + 10^{-3} \times 0,9999} \\ &\simeq 0,09. \end{aligned}$$

C'est catastrophique ! La probabilité pour qu'une personne positive au test soit effectivement malade est inférieure à 10%. Le test engendre donc beaucoup de faux-positifs (personnes positives au test, mais non malades). C'est tout le problème des maladies assez rares : les test de dépistage doivent être extrêmement fiables. Remarquons par ailleurs ici une bonne illustration du vieil adage des statisticiens : on peut faire dire n'importe quoi aux chiffres, cf le laboratoire pharmaceutique !

Correction de l'exercice 30 ▲

Soit x la proportion de tricheurs dans la population. On note respectivement P, F, H, T les événements "le joueur obtient pile", "le joueur obtient face", "Le joueur est honnête", "le joueur est un tricheur". Il semble raisonnable de convenir que $P(P|H)=1/2$ et $P(F|H)=1/2$ et $P(P|T)=1$ (un tricheur fait vraiment ce qu'il veut !). On cherche donc $P(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$P(T|P)=\frac{P(P|T)P(T)}{P(P|T)P(T)+P(P|H)P(H)}=\frac{x}{x+1/2(1-x)}=\frac{2x}{x+1}.$$

Le résultat est plus ou moins réconfortant suivant la proportion de tricheurs x dans la population !

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Voici un algorithme possible. La variable machine représente la machine avec laquelle on joue (0 pour la machine A, 1 pour la machine B). import random def jouer(n) : machine=0 total=0 if (random.random()>0.5) : machine=1 else : machine=0 for i in range(n) : if (machine==0) : if (random.random()<0.2) : total=total+1 else : machine=1 else : if (random.random()<0.1) : total=total+1 else : machine=0 return (total/n)

2. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(G_1)=P(G_1|A_1)P(A_1)+P(G_1|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}.$$

3. Le plus facile, pour calculer G_2, est de réaliser un arbre de probabilités avec 8 feuilles. La première bifurcation correspond au choix initial de la machine. La deuxième bifurcation correspond au résultat possible du premier tirage. La troisième bifurcation correspond au résultat possible du deuxième tirage. On trouve finalement :

$$P(G_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{5}\right)=\frac{31}{200}.$$

Si on veut écrire ceci plus formellement, on peut dire que $A_1\cap A_2$, $A_1\cap\overline{A_2}$, $\bar{A_1}\cap A_2$ et $\bar{A_1}\cap\bar{A_2}$ est une partition de Ω et donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(G_2)=&P(A_1\cap A_2)P(G_2|A_1\cap A_2)+P(A_1\cap\bar{A_2})P(G_2|A_1\cap\bar{A_2})\\&+P(\bar{A_1}\cap A_2)P(G_2|\bar{A_1}\cap A_2)+P(\bar{A_1}\cap\bar{A_2})P(G_2|\bar{A_1}\cap\bar{A_2}).\end{aligned}$$

Reste à calculer les diverses probabilités. Par exemple,

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$$

tandis que

$$P(G_2|A_1\cap A_2)=P(G_2|A_2)=1/5.$$

4. Appliquons la formule de Bayes : on a

$$P(A_1|G_2)=\frac{P(A_1\cap G_2)}{P(G_2)}=\frac{P(G_2|A_1)P(A_1)}{P(G_2)}.$$

La probabilité conditionnelle $P(G_2|A_1)$ se calcule également avec un arbre (en fait, un extrait de l'arbre de la question précédente), et on trouve

$$P(G_2|A_1)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{25}.$$

On en déduit que

$$P(A_1|G_2)=\frac{3}{50}\times\frac{200}{31}=\frac{12}{31}.$$

5. On applique la formule des probabilités totales comme à la première question. On trouve

$$\begin{aligned}P(G_k)&=P(G_k|A_k)P(A_k)+P(G_k|\overline{A_k})P(\overline{A_k})\\&=\frac{1}{5}P(A_k)+\frac{1}{10}(1-P(A_k))\\&=\frac{1}{10}\big(1+P(A_k)\big).\end{aligned}$$

On joue sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie si et seulement si

on joue sur la machine $\mathscr{A}$ la k-ième partie et on gagne ; on joue sur la machine $\mathscr{B}$ la k-ième partie et on perd.

On a donc

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(G_k \cap A_k) + P(\overline{G_k} \cap \overline{A_k}) \\ &= P(G_k|A_k)P(A_k) + P(\overline{G_k}|\overline{A_k})P(\overline{A_k}) \\ &= \frac{1}{5}P(A_k) + \frac{9}{10}\big(1 - P(A_k)\big) \\ &= \frac{-7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique. L'équation aux limites possibles

$$\ell = \frac{-7\ell}{10} + \frac{9}{10}$$

donne $\ell = \frac{9}{17}$. On introduit ensuite $v_k = P(A_k) - \frac{9}{17}$ et on vérifie facilement que

$$v_{k+1} = \frac{-7}{10}v_k.$$

On a donc $v_k = \left(\frac{-7}{10}\right)^{k-1} v_1$ et donc

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}\left(P(A_1) - \frac{9}{17}\right) + \frac{9}{17} \\ &= \frac{-1}{34}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} + \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$P(G_k) = \frac{13}{85} - \frac{1}{340}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

On reconnait la somme d'une suite géométrique. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(G_k) &= \frac{13}{85}n - \frac{1}{340}\left(\frac{1-\left(-\frac{7}{10}\right)^n}{1+\frac{7}{10}}\right) \\ &= \frac{13n}{85} - \frac{1}{34\times 17}\left(1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a que S_n/n tend vers $\frac{13}{85}$, ce qui est proche du résultat trouvé en faisant tourner l'algorithme de la première question pour une grande valeur de n.

6. On applique la formule des probabilités totales comme à la première question. On trouve

$$\begin{aligned} P(G_k) &= P(G_k|A_k)P(A_k) + P(G_k|\overline{A_k})P(\overline{A_k}) \\ &= \frac{1}{5}P(A_k) + \frac{1}{10}(1 - P(A_k)) \\ &= \frac{1}{10}\big(1 + P(A_k)\big). \end{aligned}$$

7. On joue sur la machine $\mathscr{A}$ la $k+1$-ième partie si et seulement si

on joue sur la machine $\mathscr{A}$ la k-ième partie et on gagne ; on joue sur la machine $\mathscr{B}$ la k-ième partie et on perd.

On a donc

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(G_k \cap A_k) + P(\overline{G_k} \cap \overline{A_k}) \\ &= P(G_k|A_k)P(A_k) + P(\overline{G_k}|\overline{A_k})P(\overline{A_k}) \\ &= \frac{1}{5}P(A_k) + \frac{9}{10}\big(1 - P(A_k)\big) \\ &= \frac{-7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

8. on joue sur la machine $\mathscr{A}$ la k-ième partie et on gagne ;
9. on joue sur la machine $\mathscr{B}$ la k-ième partie et on perd.
10. On reconnait une suite arithmético-géométrique. L'équation aux limites possibles

$$\ell = \frac{-7\ell}{10} + \frac{9}{10}$$

donne $\ell = \frac{9}{17}$. On introduit ensuite $v_k = P(A_k) - \frac{9}{17}$ et on vérifie facilement que

$$v_{k+1} = \frac{-7}{10} v_k.$$

On a donc $v_k = \left(\frac{-7}{10}\right)^{k-1} v_1$ et donc

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \left(P(A_1) - \frac{9}{17}\right) + \frac{9}{17} \\ &= \frac{-1}{34}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} + \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$P(G_k) = \frac{13}{85} - \frac{1}{340}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

11. On reconnait la somme d'une suite géométrique. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(G_k) &= \frac{13}{85} n - \frac{1}{340}\left(\frac{1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n}{1 + \frac{7}{10}}\right) \\ &= \frac{13n}{85} - \frac{1}{34 \times 17}\left(1 - \left(-\frac{7}{10}\right)^n\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a que S_n/n tend vers $\frac{13}{85}$, ce qui est proche du résultat trouvé en faisant tourner l'algorithme de la première question pour une grande valeur de n.