Chapitre : Systèmes linéaires

1 Systèmes linéaires

Exercice 1 ★ Sans problèmes –

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [527]

Exercice 2 ★ Trop d'inconnues ou d'équations –

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & 1 \\ 2x+y-z+t & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 4 \\ x+3y-z & = & 11 \\ 2x+5y-5z & = & 13 \\ x+4y+z & = & 18 \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [528]

Exercice 3 ★ Système et interprétation géométrique –

Soit m un réel. Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+my & = & -3 \\ mx+4y & = & 6 \end{array}\right.$$

(on pourra discuter en fonction de m). Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Indication ▼ Correction ▼ [530]

Exercice 4 ★★ Deux équations et deux paramètres –

Déterminer suivant la valeur des paramètres $a,b \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y & = & b \\ x+ay & = & b \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [529]

Exercice 5 ★ Systèmes proches –

Résoudre les deux systèmes suivants. Qu'en pensez-vous ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+5y+9z & = & 180 \\ 9x+10y+5z & = & 40 \\ 10x+9y+z & = & -50 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+5y+9z & = & 180 \\ 9x+10y+5z & = & 41 \\ 10x+9y+z & = & -50 \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [535]

2 Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 6 ★★ Paramètre dans le second membre –

Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'algorithme de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [3034]

Exercice 7 ★★ Discussion suivant deux valeurs –

Résoudre le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre m.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & 0 \\ x+my+z & = & 0 \\ mx+y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [2872]

Exercice 8 ★★ Paramètre partout –

Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+(1-a)y+(1-a)z & = & a^2 \\ ax+(1+a)y+(1+a)z & = & a-a^2 \\ x+y+z & = & 1-a \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [531]

Exercice 9 ★★★ Plein de cas ! –

Étudier, suivant les valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, l'existence de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ ax & + & by & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [533]

3 Applications

Exercice 10 ★ Équilibrer des équations chimiques –

Équilibrer les équations chimiques suivantes :

1. $NH_3+O_2 \to NO+H_2O$;
2. $C_2H_6+O_2 \to CO_2+H_2O$.

Indication ▼ Correction ▼ [3032]

Exercice 11 ★ Système géométrique –

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère $\mathscr{P}_1$ (respectivement $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant :

$$\begin{array}{lccccccc} \mathscr{P}_1 : & 2x & - & 3y & + & 4z & = & -3 \\ \mathscr{P}_2 : & -x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ \mathscr{P}_3 : & 4x & - & 5y & + & 14z & = & 1 \end{array}$$

1. Quelle est la nature géométrique de chacun des $\mathscr{P}_i$?
2. Déterminer l'intersection de $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$. Quelle est sa nature géométrique ?

Indication ▼ Correction ▼ [3033]

Exercice 12 ★★ Polynômes vérifiant certaines propriétés –

Déterminer tous les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie
1. $P(-1) = 5$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$;
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.

Indication ▼ Correction ▼ [2643]

Exercice 13 ★ Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples –

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1,+\infty[$.
1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Indication ▼ Correction ▼ [432]

Exercice 14 ★★★ Système non linéaire –

Résoudre le système suivant, où x, y et z sont des réels positifs :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3. \end{array}\right.$$

Indication ▼ Correction ▼ [534]

Exercice 15 ★★★★★ Application géométrique –

Soit $n \geq 3$. Discuter l'existence et l'unicité dans le plan d'un polygone à n côtés dont les milieux des côtés sont fixés.

Indication ▼ Correction ▼ [536]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Utiliser la méthode du pivot de Gauss.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Appliquer la méthode du pivot de Gauss. Dans le premier système, il y a plus d'inconnues que d'équations. Il faut exprimer certaines inconnues en fonction des autres.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Appliquer la méthode du pivot de Gauss en réalisant $L_2 - mL_1 \to L_2$. On pourra discuter en fonction de $m/$

Indication pour l'exercice 4 ▲

On discutera suivant que $a \neq \pm 1$, $a = 1$ ou $a = -1$. Dans ce dernier cas, on pourra encore discuter suivant la valeur de b.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Indication pour l'exercice 6 ▲

Appliquer la méthode du pivot de Gauss de façon standard. L'élimination donne une condition de compatibilité pour que le système possède des solutions.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Lorsque $m \neq 1$, on pourra diviser par $m - 1$ et remarquer que $1 - m^2 = (1 - m)(1 + m)$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Indication pour l'exercice 9 ▲

Indication pour l'exercice 10 ▲

Il faut placer un entier devant chaque molécule de sorte que le nombre d'atomes de chaque élément soit le même de chaque côté de l'équation.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Indication pour l'exercice 12 ▲

En calculant $P(-1)$, $P(1)$ et $P(2)$, on trouve un système de trois équations d'inconnues a, b et c. Résoudre ce système.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Mettre tout au même dénominateur, et procéder par identification.
2. Intégrer chaque "élément simple", et ajuster la constante.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Passer par le logarithme !

Indication pour l'exercice 15 ▲

Interpréter ceci en terme d'affixes de points et d'un système linéaire à résoudre dans $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

On va utiliser la méthode du pivot de Gauss. Pour le premier système, on écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3\\ x+2y+z &=& 1\\ 2x+y+z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 3 &\\ y-z &=& -2 & L_2-L_1\to L_2\\ -y-3z &=& -6 & L_3-2L_1\to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z &=& 3 &\\ y-z &=& -2 &\\ -4z &=& -8 & L_3+L_2\to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1\\ y &=& 0\\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

Pour le second système, on procède de la même façon :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z &=& 1\\ -y+z &=& 2\\ x-2y &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2z &=& 1 &\\ -y+z &=& 2 &\\ -2y-2z &=& 0 & L_3-L_1\to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2z &=& 1 &\\ -y+z &=& 2 &\\ -4z &=& -4 & L_3-2L_2\to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1\\ y &=& -1\\ z &=& 1 \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour le premier système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t &=& 1\\ 2x+y-z+t &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t &=& 1\\ -y-3z+7t &=& -3 \end{array}\right.$$

Le système est triangulaire, et il y a plus d'inconnues que d'équations. On va donc exprimer certaines inconnues en fonctions des autres. Par exemple, ici, on peut exprimer x et y en fonction de z et t. Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t &=& 1\\ -y-3z+7t &=& -3\\ z &=& z\\ t &=& t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2z-4t-2\\ y &=& -3z+7t+3\\ z &=& z\\ t &=& t \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathscr{S}=\left\{(2z-4t-2,-3z+7t+3,z,t);\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour le second système, on écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4\\ x+3y-z &=& 11\\ 2x+5y-5z &=& 13\\ x+4y+z &=& 18 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y-3z &=& 4 &\\ y+2z &=& 7 & L_2-L_1\to L_2\\ y+z &=& 5 & L_3-2L_1\to L_3\\ 2y+4z &=& 14 & L_4-L_1\to L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y-3z &=& 4 &\\ y+2z &=& 7 &\\ -z &=& -2 & L_3-L_2\to L_3\\ 0 &=& 0 & L_4-2L_2\to L_4 \end{array}\right.$$

La dernière équation, qui est une relation de compatibilité, est vérifiée. On en déduit alors facilement que l'ensemble des solutions est
$$\mathscr{S} = \{(4,3,2)\}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

On applique la méthode du pivot de Gauss. En laissant inchangée la première ligne et en faisant $L_2 - mL_1 \to L_2$, le système est équivalent à
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+my & = & -3 \\ (4-m^2)y & = & 6+3m = 3(m+2) \end{array} \right.$$
Discutons alors suivant les valeurs de m.

Si $m \neq 2$ et $m \neq -2$, $4-m^2$ ne s'annule pas. On en déduit que
$$y = \frac{3(m+2)}{4-m^2} = \frac{3(m+2)}{(2-m)(2+m)} = \frac{-3}{m-2}.$$
On reporte ceci dans la première équation et on trouve
$$x = -3 - my = -3 + \frac{3m}{m-2} = \frac{-3m+6+3m}{m-2} = \frac{6}{m-2}.$$
Le système admet donc une unique solution qui est $\left(\frac{6}{m-2}, \frac{-3}{m-2}\right)$. Si $m = 2$, alors la dernière ligne devient $0 = 12$. Le système n'admet pas de solutions. Si $m = -2$, alors la dernière ligne devient $0 = 0$ et le système est équivalent à
$$x - 2y = -3 \iff x = -3 + 2y.$$
L'ensemble des solutions est alors
$$\mathscr{S} = \{(-3+2y, y);\ y \in \mathbb{R}\}.$$
Géométriquement, on peut en déduire que les deux droites $x + my = -3$ et $mx + 4y = 6$ sont sécantes si $m \neq 2, -2$; parallèles strictement si $m = 2$; confondues si $m = -2$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss. En permutant la première et la deuxième ligne, puis en effectuant l'opération $L_2 \leftarrow L_1 - aL_1$, on obtient successivement
$$\begin{array}{rcl} (S) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay & = & b \\ ax+y & = & b \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x+ay & = & b \\ (1-a^2)y & = & b(1-a) \end{array} \right. \end{array}$$
On discute alors suivant les valeurs de a, en remarquant que $1 - a^2 = 0 \iff a \in \{-1, 1\}$.

Si $a \neq 1, -1$, alors on peut diviser par $1 - a^2$ et le système est équivalent à
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+ay & = & b \\ y & = & \frac{b}{1+a} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{b}{1+a} \\ y & = & \frac{b}{1+a}. \end{array} \right.$$
L'ensemble des solutions est donc $\left\{\left(\frac{b}{1+a}; \frac{b}{1+a}\right)\right\}$. Si $a = 1$, alors le système est équivalent à
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & b \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff x = b - y.$$
L'ensemble des solutions est donc $\{(b-y; y) :\ y \in \mathbb{R}\}$. Si $a = -1$, le système est équivalent à
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-y & = & b \\ 0 & = & 2b. \end{array} \right.$$

On doit encore discuter suivant les valeurs de b :

Si $b \neq 0$, la dernière ligne est incompatible et l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Si $b = 0$, le système devient l'unique équation $x = y$, et l'ensemble des solutions est $\{(y;y) :\ y \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On résout le première système par la méthode du pivot de Gauss. En notant (S) ce système, on a

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+5y+9z & = & 180 & \\ -35y-76z & = & -1580 & L_2-9L_1 \\ -41y-89z & = & -1850 & L_3-10L_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+5y+9z & = & 180 & \\ -35y-76z & = & -1580 & \\ z & = & 30 & 35L_3-41L_2 \end{array}\right.$$

On conclut alors facilement que le système admet une solution unique qui vaut (10,-20,30). La résolution de l'autre système est très semblable et donne pour solution unique (-66,69,-11). Deux systèmes très proches peuvent donc avoir des solutions très différentes. On dit que le système est mal conditionné.

Correction de l'exercice 6 ▲

Notons $(\mathscr{S})$ le système. Alors

$$(\mathscr{S}) \iff \left\{\begin{array}{lrrrrrrl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ L_2 \leftarrow L_2-3L_1 & - & 2y & + & 2z & = & -2 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 & - & 3y & + & 3z & = & m-1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lrrrrrrl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ L_2 \leftarrow L_2/-2 & & y & - & z & = & 1 \\ L_3 & - & 3y & + & 3z & = & m-1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lrrrrrrl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ L_3 \leftarrow L_3+3L_2 & & & & 0 & = & m+2 \end{array}\right.$$

On peut alors discuter suivant les valeurs de m :

Si $m+2 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -2$, le système n'admet pas de solutions. Si $m = -2$, alors le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1+z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est alors $\{(0,z+1,z);\ z \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

On utilise la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - mL_1 \to L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 0 \end{array}\right)$$

On distingue alors le premier cas $m = 1$. Les deux dernières lignes sont nulles et le système est équivalent à

$$x + y + z = 0.$$

L'ensemble des solutions est $\{(-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

Lorsque $m \neq 1$, on peut multiplier la deuxième et la troisième ligne par $1/(m-1)$ et on trouve le système équivalent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -m-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_3 + L_2 \to L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -m-2 & 0 \end{array}\right)$$

Si $m = -2$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est $\{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Si $m \neq -2$ (et toujours $m \neq 1$), le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + mz &= 0 \\ y - z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0, 0, 0)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss en choisissant la troisième ligne comme pivot :

$$\begin{aligned} (S) \iff & \begin{cases} x + y + z &= 1 - a & L_3 \\ y + z &= 0 & L_2 - aL_3 \\ (1-2a)y + (1-2a)z &= 2a^2 - a & L_1 - aL_3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x + y + z &= 1 - a \\ y + z &= 0 \\ a(2a-1) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On distingue alors plusieurs cas. Si $a \notin \{0, 1/2\}$, le système n'est pas compatible et n'admet donc pas de solutions. Si $a = 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1, y, -y);\ y \in \mathbb{R}\}$. Si $a = 1/2$, le système devient

$$\begin{cases} x + y + z &= 1/2 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1/2, y, -y);\ y \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

On applique la méthode du pivot en notant (S) le système initial :

$$(S)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & by & + & az & = & 1 \quad L_1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \quad L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & & & & & & \end{array}\right.$$

Nous allons maintenant discuter de l'existence des solutions. Remarquons d'abord que $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2-a-a^2 \neq 0$ donc $z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. On a donc trouvé la valeur de z. La deuxième ligne du système triangulaire est $b(a-1)y + (1-a)z = b-1$. Or, on sait déjà $a-1 \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors, en reportant la valeur de z obtenue, on trouve la valeur $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Puis avec la première ligne on en déduit aussi $x = 1 - by - az$.

Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x, y, z).

Il faut maintenant s'occuper des cas particuliers.

Si $a = 1$ alors notre système triangulaire devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \end{array}\right.$$

Si $b \neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a = 1$ et $b = 1$ alors il ne reste plus que l'équation $x + y + z = 1$. On choisit par exemple y, z comme paramètres, l'ensemble des solutions est

$$\{(1-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Si $a = -2$ alors le système triangulaire devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & by & - & 2z & = & 1 \\ & & -3by & + & 3z & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b+2 \end{array}\right.$$

Donc si $b \neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système est

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Si l'on choisit y comme paramètre alors il y a une infinité de solutions

$$\{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Enfin si $b = 0$ alors la deuxième et troisième ligne du système triangulaire sont : $(1-a)z = -1$ et $(2-a-a^2)z = -a$. Donc $z = \frac{-1}{1-a} = \frac{-a}{2-a-a^2}$ (le sous-cas $b = 0$ et $a = 1$ n'a pas de solution). Dans tous les cas il n'y a pas de solution.

Conclusion :

Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$, le système admet une unique solution. Si $a = 1$ et $b \neq 1$ il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible). Si $a = 1$ et $b = 1$ il y a une infinité de solutions (qui forment un plan dans $\mathbb{R}^3$). Si $a = -2$ et $b \neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ il y a une infinité de solutions (qui forment une droite dans $\mathbb{R}^3$). Si $b = 0$ il n'y a pas de solution.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Il s'agit de trouver a, b, c et d de sorte que le nombre d'atomes de chaque élément soit le même de chaque côté de l'équation

$$aNH_3 + bO_2 \to cNO + dH_2O.$$

Les réels a, b, c, d doivent satisfaire le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & c \\ 3a & = & 2d \\ 2b & = & c+d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} a & & & - & c & & & = & 0 \\ 3a & & & & & - & 2d & = & 0 \\ & & 2b & - & c & - & d & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrcl} a & & - & c & & & = & 0 \\ & & & 3c & - & 2d & = & 0 \\ & 2b & - & c & - & d & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrcl} a & & - & c & & & = & 0 \\ & 2b & - & c & - & d & = & 0 \\ & & & 3c & - & 2d & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2d/3 \\ b & = & 5d/6 \\ c & = & 2d/3 \end{array}\right.$$

Puisqu'on cherche une solution entière, on peut choisir la valeur $d = 6$, et on a donc équilibré la réaction chimique en l'écrivant

$$4NH_3 + 5O_2 \to 4NO + 6H_2O.$$

2. On procède en suivant exactement la même méthode, et on équilibre l'équation chimique en

$$2C_2H_6 + 7O_2 \to 4CO_2 + 6H_20.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Chaque $\mathscr{P}_i$ est un plan.
2. Un point $M(x,y,z)$ est dans l'intersection de $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ si et seulement s'il vérifie le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} -x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & -3 \\ 4x & - & 5y & + & 14z & = & 1 \end{array}\right.$$

On résout ce système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss. Notons $(\mathscr{S})$ ce système. Alors

$$(\mathscr{S}) \iff \left\{\begin{array}{rrrrrcr} -x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ & & y & + & 6z & = & 7 \\ & & 3y & + & 18z & = & 21 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 + 4L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrcr} -x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ & & y & + & 6z & = & 7 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 9 & - & 11z \\ y & = & 7 & - & 6z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $\{(9-11z, 7-6z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$. Il s'agit d'une droite passant par le point $(9,7,0)$ et de vecteur directeur $(-11,-6,1)$.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Puisque $P(-1) = a-b+c$, le triplet (a,b,c) vérifie l'équation $a-b+c=5$. Les valeurs $P(1)=1$ et $P(2)=2$ donnent les autres équations $a+b+c=1$ et $4a+2b+c=2$. Ainsi, le triplet (a,b,c) vérifie la propriété demandée si et seulement s'il est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 5 \\ a+b+c &=& 1 \\ 4a+2b+c &=& 2 \end{array}\right.$$

On résout alors ce système en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 5 \\ a+b+c &=& 1 \\ 4a+2b+c &=& 2 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcll} a-b+c &=& 5 & \\ 2b &=& -4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 6b-3c &=& -18 & L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 5 \\ b &=& -2 \\ -12-3c &=& -18 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 5 \\ b &=& -2 \\ c &=& 2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& -2 \\ c &=& 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le seul triplet qui convient est $(1,-2,2)$, soit le polynôme $P(x) = x^2 - 2x + 2$.

2. On applique la même méthode, mais cette fois le système ne comporte que deux équations. Il n'aura pas une solution unique, et on va exprimer une inconnue en fonction des autres.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 4 \\ 4a+2b+c &=& 1 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcll} a-b+c &=& 4 & \\ 6b-3c &=& -15 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 4 \\ c &=& 2b+5 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -b-1 \\ c &=& 2b+5 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les triplets solutions sont tous ceux qui s'écrivent $(-b-1, b, 2b+5)$ avec $b \in \mathbb{R}$, qui correspondent aux polynômes $(-b-1)x^2 + bx + 2b + 5$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. On peut tout mettre au même dénominateur, et procéder par identification. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\
&= \frac{x^2(a+b) + x(6a+2b+c) + (9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

L'égalité demandée sera vérifiée dès que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 5 \\ 6a+2b+c &=& 21 \\ 9a-3b-c &=& 22 \end{array}\right.$$

On résout ce système en commençant par remarquer que $a=5-b$. Il est donc successivement équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 5-b \\ -4b+c & = & -9 \\ -12b-c & = & -23 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 5-b \\ c & = & -9+4b \\ -16b & = & -32 \end{array}\right.$$

On trouve finalement comme unique solution $a=3$, $b=2$ et $c=-1$, de sorte que

$$f(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}.$$

2. On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions

$$F(x)=3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}+d.$$

La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle d vérifie l'équation

$$3\ln(1)+2\ln 5+\frac{1}{5}+d=0.$$

La primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2 est donc la fonction F définie par

$$F(x)=3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}-2\ln 5-\frac{1}{5}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

On pose $a=\ln x$, $b=\ln y$ et $c=\ln z$ et notons (S) le système. La fonction logarithme étant injective, on a :

$$\begin{array}{rcl} (S) & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} 3a+2b+6c & = & 0 \\ 4a+5b+12c & = & \ln 2 \\ 2a+2b+5c & = & \ln 3 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} 3a+2b+6c & = & 0 \\ 7b+12c & = & 3\ln 2 \\ 2b+3c & = & 3\ln 3 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} 3a+2b+6c & = & 0 \\ 7b+12c & = & 3\ln 2 \\ -3c & = & 21\ln 3-6\ln 2 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2\ln 2+6\ln 3 \\ b & = & -3\ln 2+12\ln 3 \\ c & = & 2\ln 2-7\ln 3. \end{array}\right. \end{array}$$

Ceci donne finalement comme unique solution

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2^{-2}3^{6} \\ y & = & 2^{-3}3^{12} \\ z & = & 2^{2}3^{-7}. \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On va raisonner en termes d'affixes dans le plan complexe. Soient $a_1,\dots,a_n$ les affixes des milieux fixés. On cherche des points $M_1,\dots,M_n$ dont les affixes respectives $z_1,\dots,z_n$ sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1+z_2 & = & 2a_1 \\ z_2+z_3 & = & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1}+z_n & = & 2a_{n-1} \\ z_n+z_1 & = & 2a_n. \end{array}\right.$$

Le problème admet une solution si et seulement si le système admet une solution, et la solution du problème est unique si et seulement si la solution du système est unique. On doit donc résoudre ce système. Pour cela, effectuons l'opération $L_1 - L_2 + L_3 + \cdots + (-1)^{n-1}L_n \to L_1$. Le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} (1+(-1)^{n-1})z_1 & = & 2(a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_n) \\ z_2+z_3 & = & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1}+z_n & = & 2a_{n-1} \\ z_n+z_1 & = & 2a_n. \end{array}\right.$$

On peut alors discuter suivant la parité de n.

Si n est impair, alors $1+(-1)^{n-1}=2$, la première ligne donne z_1 et en poursuivant à partir de la dernière ligne, on trouve que le système (et donc le problème) admet une unique solution. Si n est pair, alors la première ligne est une relation de compatibilité

$$a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_n=0.$$

Si cette condition n'est pas remplie, le système n'admet pas de solutions. Si la condition est remplie, alors on peut choisir une inconnue comme paramètre et exprimer toutes les inconnues en fonction de celle-ci. Le système admet une infinité de solutions.